

LA RÉUNION

PREMIER SUJET ACADÉMIQUE

ÉNONCÉ

On enroule une bande de papier de 50 mètres de long autour d'un cylindre de 6 cm de diamètre.

Le rouleau obtenu a un diamètre de 13 cm.

Evaluer l'épaisseur du papier.

SOLUTIONS

Plusieurs modélisations sont possibles : deux d'entre elles sont exposées ci-dessous.

Première solution

On note, en cm, L la longueur de la bande de papier, r le rayon du cylindre initial, R le rayon du rouleau obtenu (assimilé à un cylindre) et e l'épaisseur du papier.

On cherche e sachant que $L = 5\,000$, $r = 3$ et $R = 6,5$

On admet la conservation par enroulement de l'aire de la tranche du papier, ce qui se traduit par :

$$L.e = \pi (R^2 - r^2) \text{ d'où } e = \frac{\pi (R^2 - r^2)}{L} \approx 0,020\,892.$$

Deuxième solution

On conserve les mêmes notations que plus haut.

On considère que, lors de l'enroulement du papier, le premier tour s'effectue sur un cylindre de rayon r , le deuxième sur un cylindre de rayon $r + e$, le troisième sur un cylindre de rayon $r + 2e$, etc.

En notant n le nombre de tours de l'enroulement (supposé entier), on obtient :

$$L = 2\pi r + 2\pi (r + e) + 2\pi (r + 2e) + \cdots + 2\pi (r + (n - 1)e)$$

On reconnaît une somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique, d'où :

$$L = n \times \frac{2\pi r + 2\pi (r + (n - 1)e)}{2} = n\pi (2r + (n - 1)) = n\pi (2r + ne - e)$$

En utilisant maintenant la relation $R - r = n.e$ pour éliminer n , on obtient :