

du pentagone n'a pour côté trois diagonales du pentagone, ni trois côtés du pentagone.

(Explication ajoutée par François Lo Jacomo).

2. Notons A un des sommets de l'hexagone ; de ce sommet on doit tracer 5 segments. Nécessairement 3 au moins d'entre eux sont de même nature et, quitte à échanger traits continus et traits enpointillés, on peut supposer que ce sont trois traits continus. Appelons B, C et D leurs extrémités. Les triangles ABC, ABD et ACD ont déjà deux côtés qui sont des traits continus. Donc leur troisième côté doit être tracé en traits pointillés. Donc [BC], CD] et [BD] sont tracés en pointillés. Donc le triangle BCD a tous ses côtés de même nature.

Ceci prouve qu'on ne peut pas joindre les sommets d'un hexagone de telle sorte qu'aucun des triangles ayant ses sommets parmi les sommets de l'hexagone ne soit constitué de traits de même nature.

COMMENTAIRES

De l'équipe académique

De nombreux candidats trouvent une solution pour le pentagone, mais un seul amorce une solution (très partielle cependant) pour montrer l'impossibilité d'une solution pour l'hexagone.

De François Lo Jacomo

Ce premier exercice n'est pas immédiat : ce type de stratégie est assez classique dans le domaine des compétitions mathématiques, mais je suis curieux de savoir ce qu'ont fait les élèves de Première non familiers de ces compétitions.

De l'équipe « Brochure »

Exercice intéressant, nécessitant une certaine inventivité.

DEUXIÈME SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 4)

ÉNONCÉ

Soit a une suite de 9 entiers constituée des entiers 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 pris dans un certain ordre (chaque entier de 1 à 9 apparaît une fois et une seule dans la suite a).

On note a_1 le premier élément de a , a_2 le deuxième élément de a , ...,

a_9 le neuvième élément de a . On pose $S(a) = |a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \dots + |a_7 - a_8| + |a_8 - a_9|$

- 1- Calculer $S(a)$ lorsque $a = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$.
- 2- Calculer $S(a)$ lorsque $a = (1, 9, 2, 8, 3, 7, 4, 6, 5)$.
- 3- Montrer que $S(a) + |a_9 - a_1|$ peut s'écrire sous la forme $c_1 a_1 + c_2 a_2 + \dots + c_8 a_8 + c_9 a_9$, où les coefficients $c_1, c_2, \dots, c_9$ sont égaux à $-2, 0$ ou 2 . On appelle k le nombre de coefficients $c_1, c_2, \dots, c_9$ égaux à 2 et on appelle k' le nombre de coefficients $c_1, c_2, \dots, c_9$ égaux à -2 . Montrer que $k = k'$.
- 4- Trouver la valeur maximale de $S(a)$; on pourra commencer par majorer, en fonction de k , la quantité $S(a) + |a_9 - a_1|$.

SOLUTION

1- $S(a) = 8$.

2- $S(a) = 36$.

3- Quand on développe $S(a) + |a_9 - a_1|$, chaque nombre a_i apparaît deux fois, précédé de coefficients 1 ou -1 .

La somme de ces deux coefficients est c_i et vaut $-2, 0$ ou 2 .

On en déduit que $S(a) + |a_9 - a_1|$ peut s'écrire sous la forme $c_1 a_1 + c_2 a_2 + \dots + c_8 a_8 + c_9 a_9$ où les coefficients $c_1, c_2, \dots, c_9$ sont égaux à $-2, 0$ ou 2 . D'autre part, pour chaque valeur absolue, un des coefficients est 1 et l'autre -1 (ou inversement) donc la somme de tous les coefficients est nulle, donc le nombre k de coefficients c_i égaux à 2 est le même que le nombre k' de ceux égaux à -2 .

4- Comme il y a 9 coefficients dont k égaux à 2 et k' égaux à -2 , k est au plus égal à 4 .

$S(a)$ n'est jamais nul, donc k ne peut pas être égal à 0 .

Si $k = 1$, un majorant de $S(a) + |a_9 - a_1|$ est

$$2 \times 9 - 2 \times 1 = 16.$$

Si $k = 3$, un majorant de $S(a) + |a_9 - a_1|$ est

$$2 \times 9 + 2 \times 8 - 2 \times 2 - 2 \times 1 = 28.$$

Si $k = 3$, un majorant de $S(a) + |a_9 - a_1|$ est

$$2 \times 9 + 2 \times 8 + 2 \times 7 - 2 \times 3 + 2 \times 2 + 2 \times 1 = 36.$$

Si $k = 4$, un majorant de $S(a) + |a_9 - a_1|$ est

$$2 \times 9 + 2 \times 8 + 2 \times 7 + 2 \times 6 - 2 \times 4 + 2 \times 3 + 2 \times 2 + 2 \times 1 = 40.$$

On remarque que cette valeur 40 est obtenue pour la suite du **2**.

Comme $|a_9 - a_1|$ vaut au moins 1 , on en déduit que $S(a)$ est, dans tous les cas, majorée par 39 .

En permutant circulairement les éléments de la suite du **2** (ce qui ne change pas la valeur de $S(a) + |a_9 - a_1|$) de telle sorte que $|a_9 - a_1|$ soit égal à 1, on obtient : $S(5, 1, 9, 2, 8, 3, 7, 4, 6) = 39$

La plus grande valeur de $S(a)$ est 39.

COMMENTAIRES

1. De l'équipe académique

« Une majorité de candidats trouvent les deux sommes demandées, mais un seul explique véritablement pourquoi les c sont égaux à $-2, 0$ ou 2 .

Aucun ne prouve que $k = k'$.

Admettant que $k = k'$, deux candidats trouvent le maximum de la somme $S(a)$ et fournissent une suite qui réalise ce maximum. »

2. De François Lo Jacomo

L'exercice commence très facile pour finir (quatrième question) assez difficile compte tenu que les élèves ne connaissent pas l'inégalité de réordonnement. C'est une très bonne chose que $S(a)$ maximal ne soit pas celui fourni à la deuxième question.

Comme le précédent, c'est un exercice intéressant réclamant une certaine inventivité.

ANNEXES

1. Participation

57 inscrits ; 37 présents dans 6 centres différents (18 en Charente Maritime, 12 dans la Vienne, 7 dans les Deux-Sèvres).

2. Résultats

Compte tenu du petit nombre de candidats, on pouvait craindre de ne pas en trouver un grand nombre de qualité. Les deux meilleures copies sont d'un bon niveau mais n'atteignent pas l'excellent niveau rencontré les années précédentes.

Derrière ces deux copies, quatre copies sont encore d'un niveau satisfaisant. Ensuite, seules les questions préliminaires et sans difficultés sont résolues dans les autres copies.

Palmarès : 9 primés dont :

1^{er} Prix : Samer Hamze - Lycée Camille Guérin (Poitiers)

(Copie très au-dessus du lot)

2^e Prix : François Galvagnon - Lycée Bernard Palissy (Saintes)

3^e Prix : Denis Martin - Lycée Cordouan (Royan)

4^e Prix : Simon Mingot - Lycée Camille Guérin (Poitiers).