

**VARIANTE RÉDACTIONNELLE de F. Lo Jacomo**

1. Dans la première colonne du tableau, on a une suite arithmétique de raison 3 dont le premier terme vaut  $4 = 3 \times 1 + 1$ , et dont le  $m$ -ième terme vaut donc  $3m + 1$ . Dans cette  $m$ -ième ligne se trouve une suite arithmétique de raison  $2m + 1$ . Donc le terme de la  $m$ -ième ligne et  $n$ -ième colonne vaut :  $(3m + 1) + (n - 1)(2m + 1) = 2nm + m + n$ .

2. Si  $N$  figure à la  $m$ -ième ligne et  $n$ -ième colonne,  $2N + 1 = 4mn + 2m + 2n + 1 = (2n + 1)(2m + 1)$  n'est pas premier car  $n$  et  $m$  sont chacun au moins égal à 1.

3. Si  $2N + 1$  n'est pas premier,  $2N + 1$  peut s'écrire comme produit de deux facteurs, nécessairement impairs, et plus grand que 1 donc au moins égaux à 3. On a donc  $2N + 1 = (2m + 1)(2n + 1)$  où  $n$  et  $m$  sont chacun au moins égaux à 1, donc  $N = 2mn + m + n$  : d'après la première question,  $N$  est égal au terme de la  $m$ -ième ligne et  $n$ -ième colonne, ainsi qu'au terme de la  $n$ -ième ligne et  $m$ -ième colonne, il figure dans le tableau. Donc si  $N > 0$  ne figure pas dans le tableau, alors  $2N + 1$  est premier.

**COMMENTAIRE****De François Lo Jacomo**

Exercice assez simple. La dernière question nécessite un peu de logique et le résultat est intéressant.

**De l'équipe académique**

« Un certain nombre de candidats ne sait pas ce qu'est un nombre premier »

« Difficultés à raisonner dans la question 3 ("négation", "contraposée", exemple servant de "preuve") »

**DEUXIÈME SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 2)****ÉNONCÉ****La balle au bond**

Le terrain de jeu est un plan horizontal contenant les points distincts A et T. La balle, frappée au point A dans le but de tomber dans le trou placé en T, se déplace dans un plan vertical et sa trajectoire (P) est un

arc de parabole ou plusieurs arcs de parabole en cas de rebond(s).

L'angle aigu que forme la tangente à (P) en A avec la droite (AT) est toujours de  $45^\circ$ .

En cas de rebond en un point B, les angles aigus formés par les deux tangentes à (P) en B avec la droite (AT) ont la même mesure et la hauteur atteinte par la balle après le rebond est la moitié de la hauteur précédemment atteinte donc, à chaque rebond, la balle "perd la moitié de sa hauteur". Chaque fois que la balle est frappée, elle atteint une hauteur maximale qui varie en fonction de chaque joueur et de la frappe de celui-ci.

Le but de cet exercice est de montrer que la réussite à ce jeu dépend uniquement de cette hauteur maximale qu'on notera  $h$ .

- 1- Sachant que la balle tombe en T sans rebond avec  $h = 30$  m, déterminer AT.
- 2- La balle tombe en T après un unique rebond en un point  $A_1$ . Calculer  $AA_1$ .
- 3- La balle tombe en T après  $n$  rebonds. Calculer  $h$  en fonction de  $n$ .
- 4- Si  $h = 15$  m, la balle peut-elle tomber en T?
- 5- On suppose  $h \neq 15$  m et on note  $r$  le rapport  $\frac{h}{2h - 30}$ .

À quelle condition, portant sur  $r$ , la balle atteint-elle nécessairement le trou T et quel est alors le nombre de rebonds?

## SOLUTION 1

1) On pose  $AT = t$  et on appelle  $f$  la fonction trinôme représentée par la trajectoire (P) sur l'intervalle  $[0 ; t]$  dans le repère orthonormal  $(A, \vec{i}, \vec{j})$  (avec  $\vec{i}$  dirigé de A vers T et  $\vec{j}$  vers le haut).

Soit  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $f'(x) = 2ax + b$ . On a  $f(0) = f(t) = 0$  donc  $c = 0$  et  $at^2 + bt = 0$ .

On a  $f\left(\frac{t}{2}\right) = 30$  donc  $\frac{at^2}{4} + \frac{bt}{2} = 30$ .

On a  $f'(0) = 1$  donc  $b = 1$ .

Il vient  $at^2 + t = 0$  et  $at^2 + 2t = 120$  donc  $t = 120$ .

**Le trou T est situé à 120 mètres de A.**

2) Si on pose  $AA_1 = t$ , un calcul analogue au précédent donne  $t = 4h$ . Du fait de la symétrie de la parabole et des hypothèses, les tangentes à

(P) en  $A_1$  forment avec (AT) des angles aigus de  $45^\circ$  et le même calcul, en prenant  $A_1$  comme origine, donne  $A_1T = \frac{4h}{2} = 2h$ .  
De  $4h + 2h = 120$  on tire  $h = 120$  donc  $AA_1 = 80$  mètres.

**3)** Soit  $A_k$  la position de la balle au  $k$ -ième rebond ; les angles aigus des tangentes à (P) en  $A_k$  font toujours  $45^\circ$  avec (AT), on applique le résultat précédent :  $A_kA_{k+1}$  est 4 fois la hauteur atteinte par la balle entre  $A_k$  et  $A_{k+1}$ .

On a  $AA_1 + A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_nT = 120$  donc  $4 \left( h + \frac{h}{2} + \frac{h}{4} + \dots + \frac{h}{2^n} \right) = 120$  d'où  $h \left( 2 - \frac{1}{2^n} \right) = 30$ ,  $h = \frac{30}{2 - \frac{1}{2^n}}$  mètres.

### VARIANTE de F. Lo Jacomo

**1-** Dans un repère orthonormé de centre A où T ait pour coordonnées  $(t, 0)$ , l'équation de la parabole est  $y = ax^2 + bx + c$ . Comme  $y = 0$  et  $x = t$ ,  $c = 0$  et  $b = -at$ . La dérivée  $y' = 2ax - at$  montre qu'en A ( $x = 0$ ), la tangente a pour pente  $-at$  : pour faire un angle de  $45^\circ$ , elle doit avoir pour pente  $\tan 45^\circ = 1$ , donc  $a = \frac{-1}{t}$ . La dérivée s'annule pour  $x = \frac{t}{2}$ , donc elle atteint son maximum au milieu de [AT] à une hauteur  $y = \frac{-at^2}{4} = \frac{t}{4}$  : si cette hauteur vaut  $h = 30$  m, alors  $t = 120$  m. Si la balle tombe en T sans rebond,  $AT = 120$  m.

**2-** Le calcul ci-dessus s'applique à chaque arc de parabole, donc chaque arc de parabole est semblable au précédent, mais deux fois plus petit, vu qu'il monte deux fois moins haut : il va donc deux fois moins loin. Si la balle atteint T après un unique rebond,  $A_1T = \frac{AA_1}{2}$  donc  $AA_1 = 80$  m.

### COMMENTAIRE

#### de l'équipe « brochure »

Exercice un peu calculatoire, certes, mais "intelligent" et agréable.

## ANNEXES

### Participation

| Candidats | Inscrits | Absents | % Absents | Présents | % Présents |
|-----------|----------|---------|-----------|----------|------------|
| Total     | 362      | 94      | 25,97     | 268      | 74,03      |
| Garçons   | 231      | 49      | 21,21     | 182      | 78,79      |
| % Garçons | 63,81    | 52,13   |           | 67,91    |            |
| Filles    | 131      | 45      | 34,35     | 86       | 65,65      |
| % Filles  | 36,19    | 47,87   |           | 32,09    |            |

### Résultats

« Dans l'ensemble, beaucoup de copies sont très minces. »

### Palmarès

1<sup>er</sup> Prix : Laurent Deproit - Lycée Louis-le-Grand

2<sup>e</sup> Prix : Pierre Kreitmann - Lycée Louis-le-Grand

3<sup>e</sup> Prix : François Deroux - Lycée St Jean de Passy

1<sup>er</sup> Accessit : Irène Marcovici - Lycée Louis-le-Grand

2<sup>nd</sup> Accessit (ex aequo) : Romain Delassus - Lycée Condorcet

Louis-Gabriel De Causans - Lycée St Jean de Passy.