

PARIS

PREMIER SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 1)

ÉNONCÉ

Le crible de Sundaram

On considère le tableau suivant, dont la première colonne est constituée des termes d'une suite arithmétique de raison 3 (et de premier terme 4) et dont les lignes sont formées des termes de suites arithmétiques de raison un entier impair : 3, 5, 7, 9,

4	7	10	13	16	19	22	...
7	12	17	22	27	32	37	...
10	17	24	31	38	45	52	...
13	22	31	40	49	58	67	...
...	...	...	...	...	...	...	...

1. Exprimer en fonction des entiers non nuls n et m le nombre situé sur la m -ième ligne et la n -ième colonne du tableau.
2. Prouver que si le nombre entier N figure dans le tableau, alors l'entier $2N + 1$ n'est pas premier.
3. Peut-on affirmer que si $N \geq 1$ ne figure pas dans le tableau, alors $2N + 1$ est un nombre premier ?

SOLUTION 1

1. On trouve $t_{mn} = (2m + 1)n + m$.
2. Si N figure dans le tableau, il existe alors deux entiers n et m tels que $N = (2m + 1)n + m$, d'où $2N + 1 = (2m + 1)(2n + 1)$.
3. Supposons que $2N + 1 = ab$, avec a et b entiers, $a \geq 2$ et $b \geq 2$. Comme $2N + 1$ est impair, a et b le sont également : $a = 2p + 1$, $b = 2q + 1$. On a alors $2N + 1 = 2p(2q + 1) + 2q + 1$ d'où $N = (2q + 1)p + q = t_{qp}$ et N figure donc dans le tableau.