

l'ayant pratiquée à l'âge de 8 ans, en réponse à un calcul proposé par son maître d'école.

3°) Après des considérations sur la parité exposées dans la méthode 1, F. Jo Jacomo poursuit :

Prouvons inversement que tout entier pair n compris entre -5050 et $+5050$ peut être atteint par cette méthode. Par précaution, traitons séparément les cas extrêmes, triviaux, $n = -5050 = -1 - 2 - \dots - 100$ et $n = 5050 = 1 + 2 + \dots + 100$. $\frac{5050+n}{2}$ est strictement compris entre 0 et $5050 = 1 + 2 + \dots + 100$: soit k le plus petit entier positif tel que $1 + 2 + \dots + (k-1) \leq \frac{5050+n}{2}$ (sinon k ne serait pas le plus petit), on peut donc écrire $\frac{5050+n}{2} = 1 + 2 + \dots + (k-1) + k - r$, avec $1 \leq r \leq k$. Ce qui signifie que si l'on exclut r de la somme $1 + 2 + \dots + k$, on obtient $\frac{5050+n}{2}$ d'où :

$$\begin{aligned} n &= (2 \times (1 + 2 + \dots + (r-1) + (r+1) + \dots + k)) - (1 + 2 + \dots + 100) \\ &= 1 + 2 + \dots + (r-1) - r + (r+1) \dots + k - (k+1) - \dots - 100 \end{aligned}$$

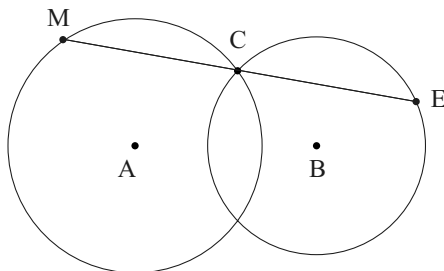
COMMENTAIRES (rédaction de la brochure)

Exercice très intéressant à partir d'une première question classique !

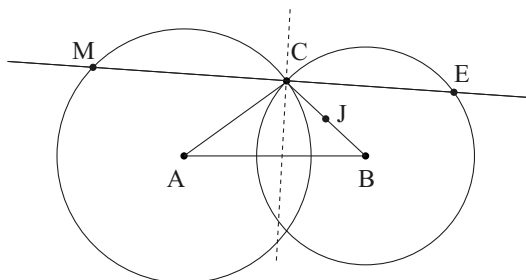
DEUXIÈME SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 4)

ÉNONCÉ

1. Prouver que pour tous réels a et b , $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos(a) \cos(b)$.
2. Etant donné un triangle ABC, on note $\mathcal{C}_1$ le cercle de centre A et passant par C et $\mathcal{C}_2$ le cercle de centre B et passant par C.
Soit M un point de $\mathcal{C}_1$ distinct de C. La droite (MC) recoupe $\mathcal{C}_2$ en E.
Construire M pour que le produit des distances $CM.CE$ soit maximum.



Si l'angle $\widehat{ACB}$ est obtus, $CM.CE$ est maximum lorsque M appartient à la bissectrice extérieure de $\widehat{ACB}$;



- De façon synthétique, la droite (CM) est la bissectrice des angles aigus formés par les droites (AC) et (BC).

SOLUTION 2 (équipe académique)

On note J le milieu de [BC], c l'angle $\widehat{ACB}$ et $f(M) = CM.CE$.

1. Si C appartient au segment [ME] :

$$ME = MC + CE$$

$$MC.ME = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{ME}$$

$$f(M) = MC.CE = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{ME} - MC^2 = MB^2 - MC^2 - BC^2$$

$$MB^2 - MC^2 = 2\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{MJ} = 2\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AJ} \text{ où J est le milieu de [BC].}$$

$$f(M) = 2\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{MA} - 2CB.AC \cos(c).$$

$$\text{Car } 2\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AJ} - BC^2 = 2\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AJ} - 2\overrightarrow{JC} \cdot \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{CB} \cdot (\overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{JC}) = 2\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$f(M) \leq 2CB.AC(1 - \cos(c))$$

Considérons le point M_1 sur $\mathcal{C}_1$ tel que $\overrightarrow{AM_1}$ et $\overrightarrow{BC}$ soient colinéaires et de même sens.

$$f(M_1) = 2CB.AC(1 - \cos(c))$$

Il est immédiat que C appartient au segment $[M_1E]$. Le point M_1 réalise donc le maximum dans ce cas.

2. Si C n'appartient pas au segment [ME].

a) si E appartient au segment [MC] : $MC = EC + ME$

$$MC.ME = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{ME}$$

$$f(M) = MC.CE = MC^2 - MC.ME = MC^2 - MB^2 + BC^2$$

b) Si M appartient au segment [CE] : $CE = MC + ME$

$$MC.ME = -\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{ME}$$

$$f(M) = MC \cdot CE = MC^2 + MC \cdot ME = MC^2 - MB^2 + BC^2$$

$$f(M) = 2\vec{MJ} \cdot \vec{BC} + BC^2 = 2\vec{MA} \cdot \vec{BC} + 2\vec{AB} \cdot \vec{AC} \leq 2AC \cdot BC(1 - \cos(c))$$

Considérons le point M_2 sur $\mathcal{C}_1$ tel que $\vec{AM_2}$ et $\vec{BC}$ soient colinéaires et de sens contraire ($[M_1M_2]$ est un diamètre de $\mathcal{C}_1$) :

$f(M_2) = 2AC \cdot BC(1 + \cos(c))$. Il est immédiat que C n'appartient pas au segment $[M_2E]$.

Le point M_2 réalise donc le maximum dans ce cas.

Conclusion :

- Si $\hat{c}$ est aigu, $\cos(\hat{c}) > 0$, le maximum est en M_2 .
- Si $\hat{c}$ est obtus, le maximum est en M_1 .
- Si $\hat{c}$ est droit, les points M_1 et M_2 réalisent le maximum.

SOLUTION 3 (Equipe académique)

Soient I le milieu de $[CE]$ et H le projeté orthogonal de M sur (BC) .
On a ainsi :

$$CM \cdot CE = |\vec{CM} \cdot \vec{CE}| = 2 |\vec{CM} \cdot \vec{CI}| = 2 |\vec{CM} \cdot \vec{CB}| = 2 |\vec{CH} \cdot \vec{CB}| = 2CH \cdot CB$$

$CM \cdot CE$ sera maximum lorsque CH le sera, (MH) sera tangente au cercle $\mathcal{C}_1$.

La parallèle à (BC) passant par A coupe $\mathcal{C}_1$ en deux points M_1 et M_2 .
($\vec{AM_1}$ et $\vec{BC}$ sont colinéaires et de même sens).

- Si $\hat{c}$ est aigu, A se projette orthogonalement sur la demi-droite $[CB]$, le maximum est en M_2 .
- si $\hat{c}$ est obtus, A se projette orthogonalement sur la demi-droite $(BC) \setminus [CB]$, le maximum est en M_1 .
- si $\hat{c}$ est droit, A se projette orthogonalement sur la droite (BC) en C , les points M_1 et M_2 réalisent le maximum.

COMMENTAIRES (par Henri Bareil)

1. Des considérations de géométrie très élémentaire font le pont entre les conclusions, formulées différemment, de la méthode 1 et des méthodes 2 et 3.

2. La méthode 3 est superbe avec sa transformation du produit scalaire par deux projections orthogonales dont l'une utilise le fait que le centre d'un cercle se projette orthogonalement au milieu de toute corde. Si bien qu'au lieu de deux inconnues CM et CE , on transfère sur un problème à une seule à la réponse évidente.

3. Les couples (E, B) et (M, A) jouent des rôles analogues. On aurait pu construire E pareillement, en projetant sur (CA) .

Les propriétés trouvées pour M solution sont analogues pour E solution corrélée.

Autre remarque de F. Lo Jacomo

(qui, dit-il, découle d'ailleurs immédiatement de l'expression avec les cosinus)

Si l'on considère deux droites passant par C , perpendiculaires entre elles, l'une recoupe des cercle en M et E , l'autre en M' et E' , alors du fait de l'angle droit, M et M' sont diamétralement opposés sur un cercle, E et E' diamétralement opposés sur l'autre, et donc (en produit scalaire) $(\vec{CM} + \vec{CM'}) (\vec{CE} + \vec{CE'}) = \vec{CM} \cdot \vec{CE} + \vec{CM'} \cdot \vec{CE'} = 4\vec{CA} \cdot \vec{CB}$, ce qui signifie que la somme algébrique des produits est constante lorsque ces droites perpendiculaires tournent autour de C .

ANNEXE

Statistiques :

169 candidats inscrits, tous de classe de Première.

de 20 lycées publics et de 4 lycées privés.

Seuls 127 ont composé, dans des centres offrant une bonne proximité.

PRIMÉ :

Deux prix proposés au jury national :

1. Clément TOROMANOFF, lycée Pothier, Orléans.

2. Pierre-Yves CLADIERE, lycée J. Monod, Saint Jean de Braye.

Dix autres distinctions, dont :

3. Fei LI, lycée J. Monod, Saint Jean de Braye.

4. Thomas BOUCHER, lycée S. Monfort, Luisant.