

ORLÉANS-TOURS

PREMIER SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 3)

ÉNONCÉ

1. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul :

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2. Montrer qu'avec un choix judicieux de $+$ ou de $-$ à la place des $\pm$, on peut obtenir ;

$$\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm \cdots \pm 99 \pm 100 = 2004.$$

3. Déterminer tous les entiers n pour lesquels on peut obtenir, selon le même principe :

$$\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm \cdots \pm 99 \pm 100 = n.$$

SOLUTION 1 (de l'équipe académique).

1. On pose $S = 1 + 2 + \cdots + n$. On a alors

$$\begin{aligned} 2S &= \begin{pmatrix} 1 & + & 2 & + & \cdots & + & (n-1) & + & n \\ n & + & (n-1) & + & \cdots & + & 2 & + & 1 \end{pmatrix} + \\ &= n+1 + n+1 + \cdots + n+1 + n+1 \end{aligned}$$

En ajoutant terme à terme dans les parenthèses.

Ainsi $2S = n(n+1)$ d'où le résultat.

2. Quelques remarques préliminaires :

- si l'on affecte un $+$ à chaque entier entre 1 et 100, on obtient une somme égale à $+ 5\,050$.
- si l'on modifie un signe $+$ en un signe $-$ sur un entier k , cela revient à retrancher $2k$ à la somme (et inversement, si l'on modifie un signe $-$ en un signe $+$, à ajouter $2k$).
- si l'on affecte un $+$ à chaque entier inférieur ou égal à p et un $-$ aux autres, on obtient une somme : $s = 2 \times \frac{p(p+1)}{2} - 5\,050 = p^2 + p - 5\,050$ puisqu'il faut alors rajouter 2 fois chaque entier affecté au préalable d'un $-$.

Tout d'abord, encadrons 2 004 par deux termes consécutifs de la suite $p^2 + p - 5\,050$. On a :

$$83^2 + 83 - 5050 = 1922 < 2004 < 84^2 + 84 - 5050 = 2090$$

Donc si l'on affecte un $+$ aux 84 premiers et un $-$ aux autres, on se trouve à 2090 et il faudra retrancher $86 = 2 \times 43$ pour obtenir le résultat : il suffira donc de transformer le $-$ devant le 43 en $+$, d'où la somme

$$2004 = +1 + 2 \cdots + \cdots + 42 - (43) + 44 + \cdots + 83 + 84 - 85 - 86 \cdots - 100$$

3. Il est clair que la plus grande somme possible est égale à 5 050 (que des $+$) et la plus petite est égale à $-5\,050$ (que des $-$).

Notons que le fait de changer un $+$ en un moins consiste à retrancher à la somme un nombre pair, donc toute somme possible sera forcément paire.

Réciproquement, soit S un entier pair compris entre $-5\,050$ et $5\,050$. Puisque la fonction $p \mapsto p(p+1) - 5050$ est croissante sur $[0, 100]$, il existe un seul entier p compris entre 1 et 100 tel que

$$(p-1)^2 + (p-1) - 5050 < S \leq p^2 + p - 5050$$

Affectons un $+$ aux entiers inférieurs ou égaux à p et un $-$ aux autres : nous obtenons donc une somme égale à $p^2 + p - 5050$.

La différence $D = (p^2 + p - 5050) - S$ est paire (en effet $2\frac{p(p+1)}{2} - 5050$ est pair) et

$$D < (p^2 + p - 5050) - (p-1)^2 + (p-1) - 5050 = 2p + 2$$

donc $\frac{D}{2} \leq p$. On en déduit que l'on peut obtenir S en affectant un $+$ à tous les entiers k compris entre 1 et p , sauf $\frac{D}{2}$ et un $-$ aux autres.

Conclusion

Les entiers obtenus sont tous des entiers pairs compris entre -5050 et 5050 .

SOLUTION 2 de F. Lo Jacomo

1°) L'auteur précise que la technique utilisée dans la méthode précédente (on peut aussi procéder par récurrence) est dite de « de Gauss », celui-ci