

4, alors, soit a est divisible par 4, soit a est le double d'un nombre impair supérieur ou égal à 3. Dans les deux cas, on peut écrire $a = da'$ où a est impair ≥ 3 ou $a' = 4$, et à toute chaîne $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ commençant par $a_1 = a'$, on peut associer une chaîne $(da_1, da_2, \dots, da_n)$ commençant par $a = da'$. La réponse est donc oui.

COMMENTAIRES (essentiellement d'après F. Lo Jacomo)

C'est un joli escalier sur les triplets, avec, certes, beaucoup de marches apportées d'emblée... Mais, dès que le thème de l'exercice est choisi, peut-on faire autrement que de décomposer?... A charge de se poser la question : peut-on le faire moins?... La réponse est évidemment oui en temps non limité et si on prévoit des petits coups de pouce à la demande.

A la question 1, les cas « a pair » pourraient être regroupés, donc le cas 7 suivre le cas 3, mais peut-être est-il intéressant de conjuguer le 7 avec le 6... puisqu'il relève du même triplet simple?

« La question 2, dit F. Lo Jacomo, est fondamentalement liée à la notion de descente infinie »...

Dans la question 4, surgit une difficulté de notation : pourquoi, dans la chaîne, noter de la même façon a_i un dernier terme qui ne joue pas le rôle des précédents?

Et aussi une possible difficulté de vocabulaire : « supérieur à » s'entend ici comme « supérieur ou égal à », **ainsi qu'à l'accoutumée**, contrairement à « strictement supérieur à ». Ne pouvait-on le préciser?

DEUXIÈME SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 4)

ÉNONCÉ

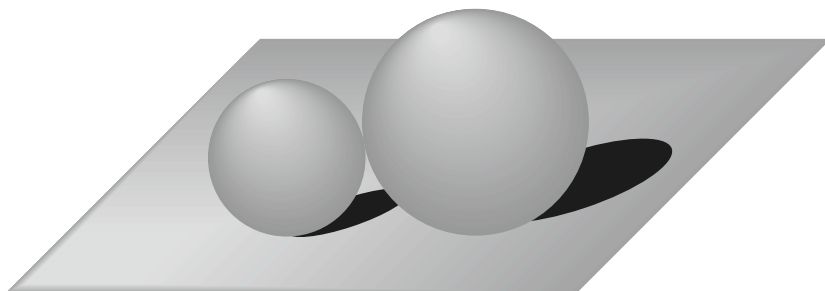
1) Question préliminaire : on se place dans le plan.

Que peut-on dire des centres et du point de contact de deux cercles tangents extérieurement?

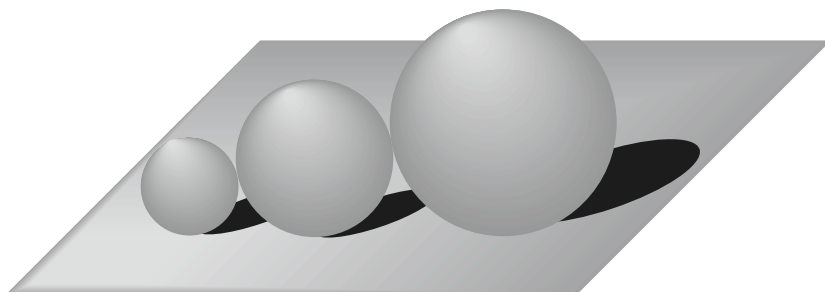
2) On se place dans l'espace.

a) Deux sphères sont posées sur un plan horizontal. Elles sont de rayons différents (a et b) et elles se touchent en un point T. Quelle est la hauteur

du point T en fonction de a et de b ?



b) Trois sphères sont posées sur un plan horizontal. Elles sont toutes de rayons différents. On sait que leurs centres sont alignés. Calculer le rayon qui manque sachant que les deux autres rayons sont 10 et 15.



SOLUTION

1- Si les deux cercles ont pour centres O et O' et sont tangents extérieurement en M, la tangente en M est perpendiculaire à (OM) et à (O'M). Donc O, M et O' sont alignés.

2- a) Dans un plan vertical passant par les deux centres A et B et le point de contact T, de hauteur t , comme $AT = a$ et $BT = b$, en considérant l'horizontale passant par T, on a : $\frac{t-a}{a} = \frac{b-t}{b}$ soit $\frac{t}{a} + \frac{t}{b} = 2$, $t = \frac{2ab}{a+b}$ est la moyenne harmonique de a et b .

b) L'alignement des centres oblige la sphère de rayon intermédiaire à être située "entre" les deux autres, ce qui correspond d'ailleurs au dessin de l'énoncé. Soient A, B et C les centres des trois sphères, de la plus grande

à la plus petite, T le point de contact des sphères de centres A et B , et U celui des sphères de centres B et C . ($T \in [AB]$ et $U \in [BC]$).

Les trois centres A, B, C des trois sphères - et leurs points de contact T et U - sont alignés sur une droite Δ qui coupe en O le plan horizontal.

Considérons l'homothétie $\mathcal{H}$ de centre O qui transforme la sphère de centre C en celle de centre B . Le rapport de cette homothétie est b/c .

Cette homothétie $\mathcal{H}$ transforme U en T et donc la sphère de centre B en une sphère posée sur le plan horizontal et tangente en T à celle de centre B . S'il existait plusieurs sphères vérifiant cette propriété, la présente question b) ne serait pas soluble. Mais la question a) prouve qu'il en existe une seule, dont le rayon a vérifie $\frac{t}{a} = 2 - \frac{t}{b}$.

Le rapport d'homothétie manifesté pour passer de B à A est $\frac{a}{b}$. D'où $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, soit $b^2 = ac$.

Lorsque $c = 10$ et $a = 15$, $b^2 = 150$ et $b = \sqrt{150}$

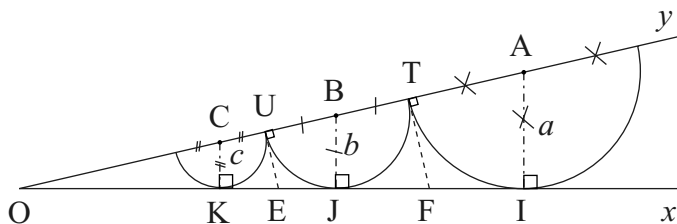
Lorsque $c = 10$ et $b = 15$, $a = \frac{225}{10} = 22,5$

Lorsque $b = 10$ et $c = 15$, $a = \frac{100}{15} = \frac{20}{3}$.

Remarque :

Si l'on ne dispose pas de l'homothétie, il y a lieu de raisonner à partir de considérations de géométrie plus élémentaires. Par exemple :

Méthode 2 :



La figure ci-dessus propose des triangles rectangles. Ainsi :

AUJ (puisque $UE = EK = EJ, \dots$)

UJT (puisque $[UT]$ est diamètre, $\dots$)

D'où $(KU) \parallel (JT)$, de même $(UJ) \parallel (IT)$

Dès lors des applications du théorème de « Thalès triangle » donnent successivement :

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{--avec OCK et OBJ : } \frac{b}{c} = \frac{OJ}{OK} \\
 \text{--avec OKU et OJT : } \frac{OJ}{OK} = \frac{OT}{OU}
 \end{array} \right\} \text{D'où } \frac{b}{c} = \frac{OT}{OU}$$

puis, de même

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{--avec OIA et OJB : } \frac{a}{b} = \frac{OI}{OJ} \\
 \text{--avec OIT et OJU : } \frac{OI}{OJ} = \frac{OT}{OU}
 \end{array} \right\} \text{D'où } \frac{a}{b} = \frac{OT}{OU}$$

Donc $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$.

Méthode 3 :

Soit $x = OC$.

$$\begin{aligned}
 \text{Avec OIA et OJB : } \frac{a}{b} &= \frac{x + c + 2b + a}{x + c + b} \\
 \text{d'où } a(x + c + b) &= b(x + c + 2b + a) \\
 x(a - b) &= 2b^2 + bc - ac \text{ et } x = \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Avec OJB et OKC : } \frac{b}{c} &= \frac{x + c + b}{x} \\
 \text{d'où } xb &= c(x + c + b) \\
 x(b - c) &= c^2 + bc \text{ et } x = \dots
 \end{aligned}$$

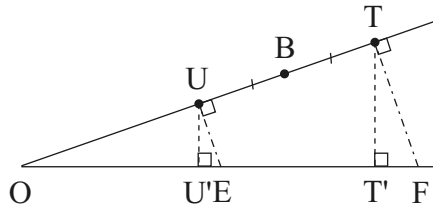
En égalant les deux expressions de x :

$$(2b^2 + bc - ac)(b - c) = (c^2 + bc)(a - b)$$

soit, après développement et simplification : $b^2 = ac$.

Méthode 4

Utilisons le a) du 2^o.



$$TT' = \frac{2ab}{a+b}$$

$$\text{De même : } UU' = \frac{2bc}{b+c}$$

$$\text{D'où : } \frac{TT'}{UU'} = \frac{a(b+c)}{c(a+b)}$$

Or l'égalité $\widehat{OEÜ} = \widehat{OFT}$ induit que les triangles rectangles $UU'E$ et $TT'F$ ont « même forme » (sont « semblables »). D'où $\frac{TT'}{UU'} = \frac{TF}{UE}$

Comme $\widehat{CEÜ} = \frac{\widehat{OEÜ}}{2}$ et $\widehat{BFT} = \frac{\widehat{OFT}}{2}$, l'égalité $\widehat{CEÜ} = \widehat{BFT}$ induit que les triangles rectangles CEU et BFT ont « même forme ».

$$\text{D'où : } \frac{TF}{UE} = \frac{BT}{CU} = \frac{b}{c}.$$

$$\text{D'où } \frac{TT'}{UU'} = \frac{b}{c}, \text{ soit } \frac{a(b+c)}{c(a+b)}, \text{ c'est-à-dire : } \frac{a(b+c)}{a+b} = b.$$

C'est-à-dire, encore $a(b+c) = b(a+b)$ soit $ac = b^2$.

COMMENTAIRES

• La question 1 peut sembler trop élémentaire pour ce type d'épreuves, mais elle permet de clarifier une situation de base.

Si le problème est proposé sans limitation de temps, il peut alors se résumer à la seule question b) du 2^o, aménagée.

Comment construire la figure de la « Méthode 2 » ?

Partir de l'un des cercles, par exemple, le cercle de centre C tangent à Ox . - Tracer la tangente (UE) , E sur (Ox) .

- Utiliser $EJ = EU$. D'où J .

- En déduire B .

- Etc. : on a T , puis F , puis I , puis A .

COMMENTAIRE GÉNÉRAL

Tels qu'ils étaient proposés, les deux sujets permettaient à tous les candidats de faire au moins « quelque chose », ce qui est encourageant.

Donnés sans limitation de temps, mieux vaudrait qu'ils soient alors transformés en sujets d'étude, de recherche, en supprimant pas mal de marches d'escalier ou d'études initiales, quitte à ce que les élèves les rétablissent d'eux-mêmes...

Elèves primés Les deux meilleurs : Andreï Klochko et Loïc Roisin.