

NICE

PREMIER SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 1)

ÉNONCÉ

Autour des triplets de Pythagore

On appelle triplet de Pythagore tout triplet de nombres entiers naturels $(a; b; c)$ tel que $a^2 + b^2 = c^2$.

1) Compléter le tableau suivant avec les consignes suivantes :

- donner un exemple de triplet de Pythagore dans le cas où vous affirmez qu'un triplet existe ;
- donner une démonstration de la non-existence d'un tel triplet de Pythagore si vous affirmez qu'il n'en existe pas de ce type.

cas	a	b	c	existence
1	pair	pair	pair	Oui (6 ; 8 ; 10)
2	pair	pair	impair	
3	pair	impair	pair	
4	impair	pair	pair	
5	impair	impair	pair	
6	impair	pair	impair	
7	pair	impair	impair	
8	impair	impair	impair	

2) Montrer que si un triplet de Pythagore est composé uniquement de nombres pairs, alors il existe n entier tel que le triplet de Pythagore

$\left(\frac{a}{2^n}, \frac{b}{2^n}, \frac{c}{2^n}\right)$ ne soit pas composé uniquement de nombres pairs.

3) On se place dans le cas où un seul des trois nombres a, b, c est pair. Dans cette question, on convient que ce nombre pair sera toujours placé en seconde position dans le triplet. (Par exemple (20 ; 21 ; 29) sera écrit (21 ; 20 ; 29))

a) Déterminez si possible un triplet de Pythagore dans chacun des cas suivants :

$(a; b; 5)$ (c'est-à-dire : dont le dernier nombre est 5)

$(5; b; c)$ (c'est-à-dire dont le premier nombre est 5)

$(7; b; c)$

$(a; b; 7)$

b) Soit n un nombre impair.

Montrer que le triplet $\left(n; \frac{1}{2}(n^2 - 1); \frac{1}{2}(n^2 + 1)\right)$ est un triplet de Pythagore.

4) Soit n un entier naturel.

On appelle chaîne de Pythagore de longueur n la donnée de n nombres entiers $(a_1; a_2; \dots; a_{n-1}; a_n)$ tels que $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{n-1}^2 = a_n^2$

a) Donner une chaîne de Pythagore de longueur 4 commençant par 3.

b) Soit a un nombre impair donné quelconque supérieur à 3. Montrer que pour tout n entier naturel supérieur à 3, on peut construire une chaîne de Pythagore de longueur n dont le premier terme est a .

c) A-t-on le même résultat si on impose au premier nombre d'être un entier pair supérieur à 4 ?

SOLUTION - synthèse des solutions de l'équipe académique et de F. Lo Jacomo

1-

Cas 2 : non (la somme de deux carrés pairs ne peut pas être un carré impair) ;

cas 3 et 4 : non (raison analogue)

cas 5 : non car si $a = 2a' + 1$, $b = 2b' + 1$, $a^2 + b^2 = 4(a'^2 + a' + b'^2 + b') + 2$ est pair sans être divisible par 4, or tout carré pair est le carré d'un nombre pair, donc est divisible par 4.

cas 6 : oui (3; 4; 5)

cas 7 : oui (4; 3; 5)

cas 8 : non, la somme de deux carrés impairs ne peut pas être impaire.

2- Si a, b, c sont pairs, alors la décomposition de a en facteurs premiers apparaît avec l'exposant α ; il apparaît avec l'exposant β dans la décomposition de b et avec l'exposant γ dans la décomposition de c . Soit n le plus petit des trois nombres α, β, γ : 2^n divise a, b et c , et l'un au moins des trois entiers $\frac{a}{2^n}, \frac{b}{2^n}, \frac{c}{2^n}$ est impair. En outre $a^2 + b^2 = c^2$ entraîne

$(ak)^2 + (bk)^2 = (ck)^2$ soit, avec $k = \frac{1}{2^n}$, $\left(\frac{a}{2^n}\right)^2 + \left(\frac{b}{2^n}\right)^2 = \left(\frac{c}{2^n}\right)^2$

3- a) $(3; 4; 5); (5; 12; 13); (7; 24; 25)$

Il n'existe pas de triplet de Pythagore $(a; b; 7)$. En effet, l'un des deux nombres a^2 ou b^2 , dont la somme est 49, devrait être compris entre $\frac{49}{2} = 24,5$ et 49. Or il n'existe que deux carrés dans cet intervalle : $5^2 = 25$ et $6^2 = 36$; $49 = 25 + 24$ et $49 = 36 + 13$, et ni 24, ni 13 ne sont des carrés.

On peut aussi pratiquer exhaustivement, par essais sur a :

$$\left. \begin{array}{l} a = 1 \text{ exige } b^2 = 48 \\ a = 3 \text{ exige } b^2 = 40 \\ a = 5 \text{ exige } b^2 = 24 \\ a = 7 \text{ exige } b^2 = 0 \end{array} \right\} \text{ Impossible pour } b$$

et on ne peut pas aller au-delà car b^2 serait négatif.

b) Si n est un nombre impair, n^2 est lui aussi impair, donc $n^2 - 1$ et $n^2 + 1$ sont pairs, les trois nombres n , $\frac{1}{2}(n^2 - 1)$ et $\frac{1}{2}(n^2 + 1)$ sont entiers et $\left(\frac{1}{2}(n^2 + 1)\right)^2 = \frac{1}{4}(n^4 + 2n^2 + 1) = \left(\frac{1}{2}(n^2 - 1)\right)^2 + n^2$.

4- a) $(3; 4; 12; 13)$ puisque $3^2 + 4^2 = 5^2$ et $5^2 + 12^2 = 13^2$ (pour cette découverte, on peut s'aider du 3^o b) et du 3^o a))

b) Le résultat vaut pour $a = 3$, vu la question précédente.

Supposons $a > 3$, et supposons qu'il existe une chaîne, de longueur $n - 1$, $(a, a_2, a_3, \dots, a_{n-2}, b)$ de premier terme $a_1 = a$, dont tous les termes, sauf a et b sont pairs. L'hypothèse de récurrence est vraie pour $n = 4$, en choisissant le triplet $\left(a; \frac{1}{2}(a^2 - 1); \frac{1}{2}(a^2 + 1)\right)$ vu que $a^2 - 1 = (a - 1)(a + 1)$ est divisible par 4 car produit de deux nombres pairs, donc $\frac{1}{2}(a^2 - 1)$ est pair et $\frac{1}{2}(a^2 + 1)$ est impair. Dès lors $\left(b; \frac{1}{2}(b^2 - 1); \frac{1}{2}(b^2 + 1)\right)$ est lui aussi un triplet de Pythagore dont le deuxième terme est pair, les deux autres impairs, et la chaîne $\left(a, a_2, a_3, \dots, a_{n-2}, \frac{1}{2}(b^2 - 1), \frac{1}{2}(b^2 + 1)\right)$ est une chaîne de Pythagore de longueur n .

c) Si l'on choisit $a = 4$, il suffit d'intervertir les deux termes de la question précédente : $(4, 3, 12, 84, 85)$ par exemple. Si a est pair supérieur à