

DEUXIÈME SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 4)

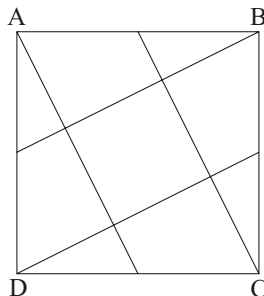
ÉNONCÉ

ABCD est un carré de côté 1.

A partir des milieux des côtés du carré ABCD, on construit la figure ci-contre :

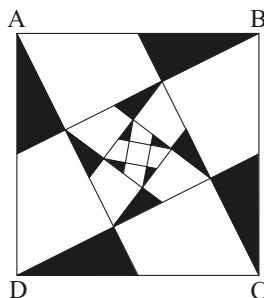
1) Justifier que l'on construit un petit carré à l'intérieur du carré ABCD.

Quelle est la longueur de son côté ?



2) Dans la suite, on procède au même découpage des carrés ainsi construits et, à chaque étape, on colorie les quatre petits triangles formés, comme indiqué sur la figure ci-contre.

Montrer que l'aire de la partie coloriée tend vers le quart de l'aire du carré ABCD lorsqu'on poursuit indéfiniment cette construction.

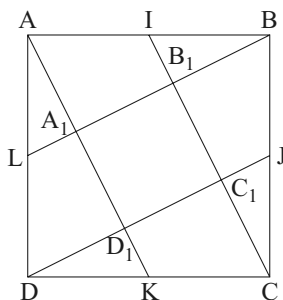


SOLUTION

1) Une démonstration élémentaire du niveau de seconde.

Montrons que $A_1B_1C_1D_1$ est un parallélogramme.

$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{KC}$ et $\overrightarrow{DL} = \overrightarrow{JB}$. On en déduit que (AK) est parallèle à (IC) et (LB) parallèle à (DJ). Donc $A_1B_1C_1D_1$ est un parallélogramme.



Pour montrer que ce parallélogramme est un carré, montrons qu'il a un angle droit et deux côtés consécutifs égaux.

Montrons que $\widehat{D_1C_1B_1}$ est un angle droit.

Notons $\alpha_1 = \widehat{JDA}$, $\beta_1 = \widehat{CDJ}$, $\alpha_2 = \widehat{CJD}$ et $\beta_2 = \widehat{BCI}$

Les triangles rectangles ICB et JDC ont leurs côtés de l'angle droit respectivement égaux ; ils sont isométriques et on déduit que $\beta_1 = \beta_2$.

Les angles α_1 et α_2 sont alternes internes, formés par les droites parallèles (AD) et (BC) et la droite sécante (DJ), ils sont donc égaux.

Comme $\alpha_1 + \beta_1 = 90^\circ$ alors $\alpha_2 + \beta_2 = 90^\circ$.

Et donc, $\widehat{D_1 C_1 B_1}$ est un angle droit.

Montrons que $D_1 C_1 = C_1 B_1$.

Dans le triangle CBB_1 , J est milieu de $[BC]$ et (JC_1) est parallèle à (BB_1) donc C_1 est milieu de $[CB_1]$ et, par conséquent, $CC_1 = C_1 B_1$.

De la même manière, démontrons que $DD_1 = D_1 C_1$.

D'autre part, les triangles DKD_1 et CJC_1 ont un côté de même longueur ($CJ = DK$) et leurs angles ont respectivement même mesure, donc ils sont isométriques et on a $DD_1 = CC_1$.

On en déduit donc que $D_1 C_1 = C_1 B_1$.

On conclut que $A_1 B_1 C_1 D_1$ est un carré.

Calculons la longueur du côté de ce carré.

Dans le triangle rectangle $DC_1 C$, $DC_1^2 + C_1 C^2 = DC^2$.

Or $DC_1 = 2 D_1 C_1$ et $C_1 C = D_1 C_1$, donc $5 D_1 C_1^2 = DC^2$ et, par conséquent :

$$D_1 C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} DC = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

2) D'après le théorème de Thalès dans le triangle $DC_1 C$,

$$D_1 K = \frac{1}{2} CC_1 = \frac{1}{2\sqrt{5}}.$$

$$\text{Donc aire } (DD_1 K) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2\sqrt{5}} DC \times \frac{1}{\sqrt{5}} DC = \frac{CD^2}{20}.$$

D'où l'aire des quatre triangles colorés est égale à $\frac{1}{5}$ de l'aire du carré $ABCD$; elle est aussi égale à l'aire du carré $A_1 B_1 C_1 D_1$.

Par le même procédé, on démontre que l'aire colorée à chaque étape est donc une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme $u_1 = \frac{1}{5}$.

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{1}{5} \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{1}{4} \left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n\right)$$

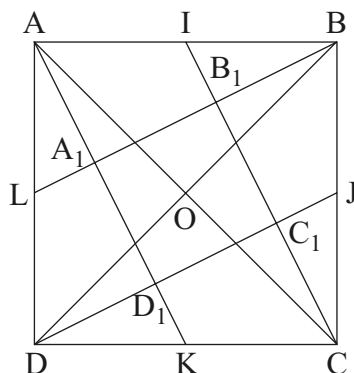
$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$, donc l'aire de la partie colorée tend vers $\frac{1}{4}$ de l'aire du carré $ABCD$.

A l'aide du produit scalaire

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{DJ} &= (\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CJ}) \\
 &= \overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CJ} \\
 &= \overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{DC} \text{ car } \overrightarrow{IB} \perp \overrightarrow{CJ} \\
 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0
 \end{aligned}$$

Donc (DJ) est perpendiculaire à (IC), c'est-à-dire que $\widehat{D_1C_1B_1}$ est un angle droit.

2) A l'aide d'une rotation (par Henri Bareil)



Soit O le centre du carré ABCD et r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ qui envoie B en A.

$r(B) = A$, $r(A) = D$, $r(D) = C$ et $r(C) = B$.

L'image du segment [AB] par r est donc le segment [AD] et, par conservation du milieu, l'image du milieu I de [AB] par r est le milieu L de [AD]. On a $r(I) = L$. On démontre de même que $r(L) = K$.

Le point B_1 appartient à [BL] donc $r(B_1)$ appartient à [AK].

Le point B_1 appartient à [IC] donc $r(B_1)$ appartient à [BL].

Ainsi $r(B_1) = A_1$ point d'intersection de [AK] et [BL].

On démontre de même que $r(A_1) = D_1$, $r(D_1) = C_1$ et $r(C_1) = B_1$.

On en déduit que les diagonales de $A_1B_1C_1D_1$ ont même milieu, même longueur et sont perpendiculaires et, par conséquent, $A_1B_1C_1D_1$ est un carré de centre O.

On peut aussi (remarque de F.L.J.) utiliser le fait que seul un carré est invariant par une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Autre méthode pour la question 2 (par Henri Bareil)

Pour chacun des quatre triangles rectangles tels que A_1AB , la partie noircie en est le quart (triangles semblables de rapport $\frac{1}{2}$).

Donc, en exceptant le carré central de la première étape, l'aire noircie est le quart de l'aire considérée. Re commençons à l'étape suivante : pour le carré qui avait été excepté, l'aire noircie est le quart de l'aire sans le nouveau carré central.

D'étape en étape, le carré central a une aire qui peut être rendue aussi voisine de zéro que l'on veut, la partie noircie étant toujours le quart des aires bordant successivement le carré central... Donc la partie noircie a pour limite le quart de l'aire de ABCD.

COMMENTAIRE

Cet exercice, accessible de plusieurs façons, est donc intéressant. Les diverses méthodes utilisables le sont elles-mêmes. Remarquons la simplicité, pour la question 1 de la résolution par rotation. Encore vaut-il mieux savoir, ce qui s'enseignait en Troisième voici peu, caractériser les polygones réguliers par leur invariance dans telle ou telle rotation...

ANNEXE

1. Participation

178 candidats inscrits (129 garçons et 49 filles)

140 candidats présents (99 garçons et 41 filles).

Prix

Huit candidats « classés »

1^{er} prix : Mathieu FRIMAT - Lycée Poincaré (Nancy)

2^e prix : Thomas BIENKOWSKI - Lycée Fabert (Metz)

3^e prix : Benoît WUCHER - Lycée Louis Vincent (Metz).