

NANCY-METZ

PREMIER SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 1)

ÉNONCÉ

Déterminer toutes les suites d'entiers naturels impairs consécutifs dont la somme est égale à 2004.

SOLUTION 1

Méthode 1

Les entiers de la suite sont impairs et leur somme est paire, donc il y a un nombre pair de termes.

Soit $2t$ le nombre de termes de la suite.

On peut les écrire : $n - (2t - 1) \dots ; n - 3 ; n - 1 ; n + 1 ; n + 3 ; \dots ; n + (2t - 1)$ avec $n \geq 2t - 1$.

n , milieu des extrêmes de la suite est pair ; on note $n = 2k$.

La somme des termes est égale à $2tn$ et $2tn = 4tk$.

On cherche donc t et k tels que $4tk = 2004$, soit $tk = 501 = 3 \times 167$. Comme 3 et 167 sont des nombres premiers et $k \geq t$, on a deux possibilités :

- Soit $t = 3$ et $k = 167$, ce qui donne la solution : 329 ; 331 ; 333 ; 335 ; 337 ; 339.
- Soit $t = 1$ et $k = 501$, ce qui donne la solution : 1001 ; 1003.

Méthode 2

Elle donne aussi les suites d'entiers naturels pairs consécutifs dont la somme est 2004.

On note x_1 le premier terme de la suite et n le nombre de termes.

$$S = x_1 + x_1 + 2 + x_1 + 4 + \dots + x_1 + 2(n - 1) = nx_1 + n(n - 1) = n(x_1 + n - 1).$$

On a : $2004 = 167 \times 3 \times 2^2$.

En remarquant que : $S = 2004 = n(x_1 + n - 1) \geq n^2$, on déduit que $n \leq 44$.

On obtient les solutions suivantes :

$n = 2$, $x_1 + n - 1 = 1002$ donc $x_1 = 1001$ d'où la solution avec des nombres impairs : **1001 ; 1003**

$n = 3$, $x_1 + n - 1 = 668$ donc $x_1 = 666$ d'où la solution avec des nombres pairs : **666 ; 668 ; 670**

$n = 4$, $x_1 + n - 1 = 501$ donc $x_1 = 498$ d'où la solution avec des nombres

pairs : **498 ; 500 ; 502 ; 504**

$n = 6$, $x_1 + n - 1 = 334$ donc $x_1 = 329$ d'où la solution avec des nombres impairs : **329 ; 331 ; 333 ; 335 ; 337 ; 339**

$n = 12$, $x_1 + n - 1 = 167$ donc $x_1 = 156$ d'où la solution avec des nombres pairs : **156 ; 158 ; 160 ; 162 ; 164 ; 166 ; 168 ; 170 ; 172 ; 174 ; 176 ; 178.**

Remarques

1- Si on autorise les nombres négatifs on a deux autres suites qui prolongent les deux suites trouvées :

• la suite :

$-327; -325; \dots; -3; -1; 1; 3; \dots; 325; 327; 329; 331; 333; 335; 337; 339$

• la suite : $-999; -997; \dots; -3; -1; 1; 3; \dots; 997; 999; 1001; 1003.$

2- On peut chercher quels sont les entiers qui sont la somme des termes consécutifs d'une suite d'entiers naturels non nuls de raison 2 et d'au moins 2 termes.

VARIANTES - rédaction de F. LO JACOMO

Il est facile de prouver par récurrence que : $1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$.
Donc si $k < n$, $(2k + 1) + \dots + (2n - 1) = n^2 - k^2 = (n - k)(n + k)$.
Comme $n - k$ et $n + k$ sont de même parité (leur somme $2n$ est paire), le problème revient à décomposer 2004 en un produit de deux facteurs de même parité (donc tous deux pairs), ce qui (en divisant chacun de ces facteurs par 2) revient à décomposer 501 en un produit de deux facteurs. Comme $501 = 3 \times 167$ et que 167 est un nombre premier, les seuls diviseurs de 501 sont 1, 3, 167, 501, donc :

• soit $n - k = 2$, $n + k = 2 \times 501$, $n = 502$ et $k = 500$,

$1001 + 1003 = 2004$ est une des solutions,

• soit $n - k = 2 \times 3$, $n + k = 2 \times 167$, $n = 170$ et $k = 164$,

$329 + 331 + 333 + 335 + 337 + 339 = 2004$ est une autre solution.

Compte tenu du raisonnement ci-dessus, ce sont les deux seules solutions.

Remarques

Dans la variante de F. LO JACOMO, la récurrence de la première ligne n'est pas indispensable. On peut aussi employer la méthode "du petit Gauss" :

$$\begin{array}{rcccccc}
 S & = & 1 & + & 3 & + & \dots & + & (2n-3) & + & (2n-1) \\
 S & = & (2n-1) & + & (2n-3) & + & \dots & + & 3 & + & 1
 \end{array}$$

Avec, en sommant « verticalement » terme à terme :

$$S = 2n + 2n + \dots + 2n + 2n$$

le nombre de termes étant n . D'où $2S = 2n \times n = n^2$.

L'immersion de $(2k+1) + \dots + (2n-1)$, de somme s , dans $1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1) + (2k+1) + \dots + (2n-1)$ permet d'exploiter le résultat précédent et donne : $n^2 = k^2 + s$. D'où...

Insistons, au passage, sur cette méthode...

SOLUTION 2 par A. Guillemot, avec calculatrices

On sait que la somme des n premiers nombres impairs vaut n^2 .

$\sqrt{2004} = 44,7\dots$ Donc la plus longue suite de nombres impairs consécutifs dont la somme vaut 2004 ne dépassera pas 44 termes.

Soit p un nombre pair, la suite de n nombres impairs consécutifs à partir de p s'écrit $p+1, p+3, p+5, \dots, p+2n-1$.

Sa somme vaut $n^2 + n \times p$.

On cherche à trouver n et p tels que $n^2 + n \times p = 2004$ avec comme contraintes : n entier tel que $2 \leq n \leq 44$ et p pair.

La condition $n^2 + n \times p = 2004$ peut s'écrire : $p = \frac{2004 - n^2}{n}$.

Sur la calculatrice, on entre la fonction $Y1 = (2004 - X^2)/X$ puis on fait défiler la table des valeurs de X variant de 2 à 44. On cherche dans cette table les valeurs de X telles que $Y1$ soit un entier pair.

On trouve les résultats : $X = 2$ donne $Y1 = 1000$

et $X = 6$ donne $Y1 = 328$.

Le problème a donc deux solutions :

{1001 ; 1003} et {329 ; 331 ; 333 ; 335 ; 337 ; 339}.

COMMENTAIRE GÉNÉRAL (rédaction de la brochure)

Cet exercice semble abordable, surtout dès qu'on sait sommer une suite arithmétique, et intéressant.