

B' et C'), M. Dupond en fait nécessairement partie sinon il n'aurait pas obtenu sept réponses différentes. Donc Mme Dupond aussi, et elle a serré trois mains.

COMMENTAIRES

1 - De l'équipe académique

« Une petite ambiguïté dans l'énoncé (au moins au départ) pouvait laisser croire qu'il y avait 10 personnes (ce qui était rapidement contredit par "sept réponses différentes"). Est-ce pour cela que nous n'avons pas eu beaucoup de copies abordant le sujet ? Quelques solutions parfaites. »

2- F. LO JACOMO

Ce premier exercice m'a bien plu car il est astucieux, il fait craindre des raisonnements élaborés à base de graphes alors que si l'on se convainc que c'est nécessairement plus simple que cela, on trouve la solution dans un temps raisonnable.

3- Des rédacteurs de la brochure

Il y a peut-être une autre ambiguïté dans l'énoncé : Mme Dupond tantôt embrasse, tantôt serre une main, tantôt les deux à la fois ? Le corrigé amalgame en disant qu'elle "salue", mais l'énoncé ne le faisait pas !

D'autre part, ces gens-là ont un comportement bizarre : on devrait s'attendre à ce que Mme Dupond, au moins par pure politesse, "salue" tout le monde, ce qui relance la discussion "embrasser" ou "serrer une main", distinction qui rendrait la question plausible...

Ne serait-il pas opportun, pour l'avenir, de lever toutes ces ambiguïtés ? L'exercice en sera d'autant plus délectable... , et, à juste titre, plus qu'apprécié : un vrai bijou de raisonnement.

DEUXIÈME SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 4)

ÉNONCÉ

ABC est un triangle quelconque.

I est un point du segment [AC].

Déterminer puis construire le ou les points J de (BC) tels que la droite (IJ) partage le triangle en deux parties de même aire.

SOLUTION 1

L'aire d'un triangle MPQ est donnée par $\frac{1}{2} MP \times MQ \sin \widehat{M}$.

L'idée est donc de trouver le point J sur le segment [BC] tel que $CI \times CJ = \frac{1}{2} CA \times CB$ ou un point P sur le segment [AB] (différent du milieu de [AB]) tel que $AP \times AI = \frac{1}{2} AB \times AC$.
On appelle O le milieu de [AC].

Si I est sur le segment [OA], on mène par A la parallèle à (BI) qui coupe (BC) en K (le point K est sur la demi-droite [CB) avec $CK < 2 CB$); d'après le théorème de Thalès on a $\frac{CI}{CA} = \frac{CB}{CK}$, c'est-à-dire $CI \times CK = CA \times CB$. Si on appelle J le milieu de [CK], il appartient à [CB] et on a $CI \times CJ = \frac{1}{2} CA \times CB$.

Si I est sur le segment [OC], on mène par C la parallèle à (BI) qui coupe (AB) en L (avec L qui appartient à [AB], différent de B, tel que $AL < 2 AB$); d'après le théorème de Thalès, on a $\frac{AI}{AC} = \frac{AB}{AL}$, c'est-à-dire $AI \times AL = AC \times AB$. Si on appelle P le milieu de [AL], il appartient au segment [AB] et on a $AI \times AP = \frac{1}{2} AC \times AB$, la droite (PC) coupe (BC) (car L différent de B, donc P n'est pas le milieu de [AB]) en J qui est le point cherché.

VARIANTE

• Cas I sur [OA].

On cherche J sur [BC] tel que $CI \times CJ = \frac{1}{2} CA \times CB$, soit $CI \times CJ = CO \times CB$, c'est-à-dire $\frac{CI}{CO} = \frac{CB}{CJ}$, c'est-à-dire (OJ) // (BI). D'où J.

• Cas I sur [OC].

De même avec P sur [AB] tel que $AI \times AP = \frac{1}{2} AC \times AB$ soit $AI \times AP = AO \times AB$ soit (BI) // (OP). Etc.

SOLUTION 2 (par H. Bareil)

Cette solution est valable en Collège.

Nous désignerons les aires par des parenthèses.
Soit O le milieu de $[AC]$. Alors $(ABO) = (CBO)$.

Cas « frontières » pour I :

Si I est en A , il faut et il suffit que J soit le milieu de $[BC]$.

Si I est en O , il faut et il suffit que J soit en B .

Si I est en C , on lui associe le milieu de $[AB]$ et le point J est rejeté à l'infini.

Cas généraux

Etant donné $(ABO) = (ACO)$, la droite (IJ) doit couper $[OB]$. D'où les deux cas :

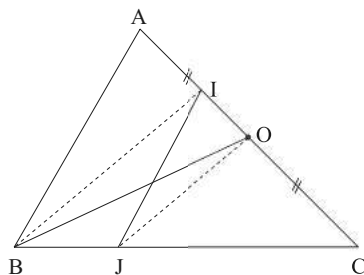


figure 1

1- (fig.1) I sur $[OA]$ privé de O et de A (i.e. sur $]OA[$)

Soit alors J sur $[BC]$.

Il faut et il suffit que $(CIJ) = (BOC)$ donc, compte tenu de la partie (COJ) commune aux deux aires, que $(BOJ) = (IOJ)$, c'est-à-dire que $(BI) \parallel (OJ)$.

D'où la construction, l'existence et l'unicité de J .

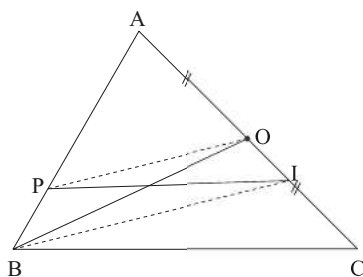


figure 2

2- (fig. 2) I sur $[OC]$ privé de O et de C (i.e. sur $]OC[$)

(IJ) coupant $[AB]$ en P , on aura, de même, $(OP) \parallel (BI)$.

D'où P et J sur (BC) .

SOLUTION 3 (par A. Guillemot avec calculatrices)**Recherche avec Cabri Junior**

On construit un triangle ABC dont on affiche l'aire ; I un point de $[AC]$, M milieu de $[AC]$ et on cherche J sur (BC) tel que l'aire de IJC soit la moitié de l'aire de ABC .

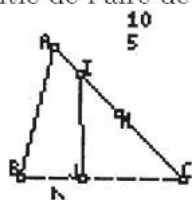


figure 1

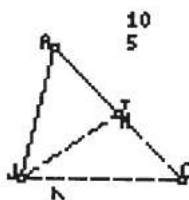


figure 2

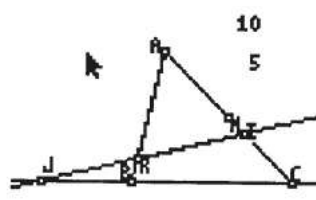


figure 3

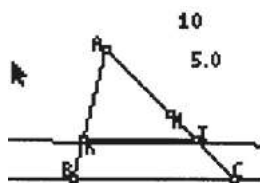


figure 4

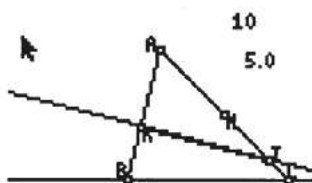


figure 5

En déplaçant I sur $[AC]$, on constate que :

- Si I est sur $[AM]$, J est sur $[BC]$ (figure 1)
- Si I est en M , J est en B (on retrouve ainsi la propriété : une médiane partage le triangle en deux triangles de même aire). (figure 2).
- Si I est sur $[MC]$, on utilise un point K de $[AB]$ pour faire la figure.
- Si I est près de M , J est à l'extérieur de $[BC]$, du côté de B (figure 3).
- Si I atteint un point Q que l'on précisera, (IK) est parallèle à (BC) donc J n'existe pas (figure 4).
- Si I est entre Q et C , J est à l'extérieur de $[BC]$ du côté de B (figure 5).

Par contre, rien de simple ne permet de caractériser la position de J connaissant I , d'où l'idée de chercher d'abord un point N de $[BC]$ tel que l'aire de NIC soit égale à celle de ABC . Il suffira ensuite de prendre J au

milieu de $[NC]$ (figure 6).

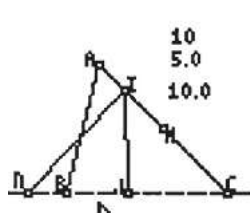


figure 6

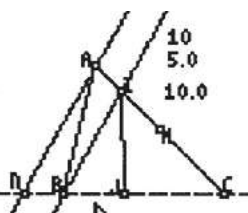


figure 7

Dans ce cas, il semblerait que les droites (NA) et (BI) soient parallèles (figure 7)

Vérification

On trace le triangle ABC , M le milieu de $[AC]$, I un point de $[AM]$, la parallèle à (BI) passant par A coupe (BC) en P .

On trouve bien que l'aire de PIC est égale à l'aire de ABC (figure 8)

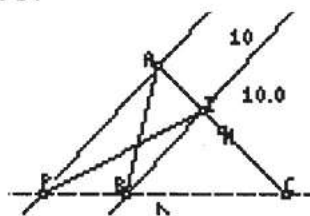


figure 8

Démonstration

1) Cas où I appartient à $[AM]$

On considère la figure précédente. $AIBP$ est un trapèze, les triangles AIP et ABP ont même base $[AP]$ et même hauteur (celle du trapèze) donc ils ont même aire.

$$\text{Aire}(ABC) = \text{Aire}(APC) - \text{Aire}(ABP)$$

$$\text{Aire}(PIC) = \text{Aire}(APC) - \text{Aire}(AIP).$$

Il en résulte que $\text{Aire}(ABC) = \text{Aire}(PIC)$.

Soit J le milieu de $[PC]$, on a bien $\text{Aire}(IJC) = \frac{1}{2} \text{Aire}(ABC)$.

2) Cas où I appartient à $[MC]$

La droite qui partage le triangle en deux domaines de même aire coupera

le côté $[AB]$ en K . On détermine K comme on a déterminé J dans le cas précédent.

Se pose alors le problème de l'existence de J .

Si (IK) est parallèle à (BC) , les triangles AIK et ABC sont homothétiques dans le rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ pour avoir le rapport des aires égal à $\frac{1}{2}$. Dans

ce cas, $\overrightarrow{AI} = \frac{\sqrt{2}}{2} \overrightarrow{AC}$. Soit Q ce point particulier de $[AC]$ et dans ce cas, J n'existe pas.

Si I est en C , J sera en C . La droite qui partage ABC en deux domaines de même aire est la médiane issue de C qui ne peut être définie par la droite (IJ) .

Algorithme de construction de J .

- Si I est entre A et M , on trace la parallèle à (BI) passant par A ; celle-ci coupe (BC) en P et J est le milieu de $[PC]$ (1).
- Si I est en A , J est le milieu de $[AC]$.
- Si I est en M , J est en B .
- Si I est entre M et C , on commence d'abord par trouver un point K de $[AB]$ tel que $\text{Aire}(AIK) = \frac{1}{2} \text{Aire}(ABC)$, comme on a fait en (1).
- Si I est entre M et Q , la droite (IK) coupe (BC) en J (à l'extérieur de $[BC]$, du côté de B).
- Si I est en Q , la droite (IK) est parallèle à (BC) et J n'existe pas.
- Si I est entre Q et C , la droite (IK) coupe (BC) en J (à l'extérieur de $[BC]$, du côté de C).
- Si I est en C , la droite qui partage ABC en deux triangles de même aire est la médiane issue de C , donc J est en C et on ne peut pas parler de la droite (IJ) .

COMMENTAIRES

1. De l'équipe académique L'énoncé nous semblait clair. Or la mobilisation de la formule $\frac{1}{2} AB \times AC \sin \hat{A}$ est exceptionnelle; l'aspect d'homothétie et Thalès n'est vu que par trois ou quatre candidats. Nous regrettons également qu'il y ait très peu d'études de cas particuliers.

Est-ce la position de l'exercice ? ou un manque d'habitude des problèmes d'aires autres que les "mini-max" plus analytiques ?

2. de F. LO JACOMO L'exercice semble très simple.

3. De l'équipe « brochure »

Mais oui ! l'énoncé est très clair ! et l'exercice toujours intéressant.

On trouve ce problème, sous une forme un peu plus générale ((CIJ) - ou (API) -) = k (ABC) en page 131 de la brochure APMEP n° 79 (de 1990) et il doit être dans les traités classiques.

Le Bulletin Vert APMEP n° 451, page 273, a proposé un problème du même ordre, plus difficile, relatif au partage d'un trapèze. Une solution est parue dans le Bulletin n° 453, pages 606-607.

ANNEXES

Participation

96 inscrits	42 filles	54 garçons
61 présents	23 filles	38 garçons

répartis sur 8 centres d'épreuves.

Résultats

- Exercices nationaux globalement mieux réussis que les exercices académiques.
- 45 copies intéressantes et à au moins un titre.
- 16 copies blanches ou nulles.

Primés

Trois prix et deux "premiers accessits".

1^{er} prix : Florian PUDDU - Lycée Joffre (Montpellier)

2^e prix : Sophie COURCET - Lycée Arago (Perpignan)

Julie ANTON - Lycée Daudet (Nîmes)