

expérimentation à la clé, si (et seulement si !) on dispose d'un petit stock d'allumettes ! (Impossible lors des Olympiades, mais, ..., en devoir à la maison. ...)

Facile à exploiter si l'on procède avec les "angles extérieurs" d'un triangle, les symétries et les angles à la base d'un triangle isocèle, et toujours progressivement.

Donc, bel exercice, dès le collège, à cela près que la rédaction, pour le cas général, est peut-être un peu laborieuse et sinon peut-être elliptique. Mais tans pis pour cet écueil. ...

DEUXIÈME SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 3)

ÉNONCÉ

Le nombre de l'année

Soit N le nombre qui s'écrit (en base dix) en juxtaposant, dans l'ordre, les 2004 premiers naturels :

$$N = 12345 \dots 9101112 \dots 2001200220032004$$

1. Quel est le nombre de chiffres de N ?
2. Quel est le chiffre qui occupe la 2004^{ième} place en partant de la gauche ?
3. Combien de "4" sont utilisés pour écrire N ?

SOLUTION

1. Pour connaître le nombre de chiffres de N , on dénombre successivement les nombres à un, deux, trois ou quatre chiffres utilisés pour écrire N :

Il y a 9 nombres entiers naturels à un chiffre

Il y a 90 nombres entiers naturels à deux chiffres (de 10 à 99)

Il y a 900 nombres entiers naturels à trois chiffres (de 100 à 999)

Il y a 1005 nombres entiers naturels à quatre chiffres (de 1000 à 2004)

N a donc $9 + 2 \times 90 + 3 \times 900 + 4 \times 1005 = 6\,909$ chiffres.

Le nombre de chiffres de N est 6 909

2. Après recherche au brouillon, on décompose N selon les nombres utilisés :

- Les 9 premiers chiffres de N correspondent aux 9 premiers naturels.

• Les 180 suivants correspondent aux 90 naturels de deux chiffres suivants (de 10 à 99). Or $2\ 004 - 189 = 1\ 815$ et $1\ 815 \div 3 = 605$

• Les chiffres suivants correspondent aux 605 naturels de trois chiffres suivants (de 100 à 704).

Il a donc fallu juxtaposer les $605 + 90 + 9 = 704$ premiers naturels pour utiliser $1\ 805 + 180 + 9 = 2\ 004$ chiffres.

Le 2004^{ème} chiffre de N en partant de la gauche est le 4 de 704.

3. Pour écrire les entiers naturels de 1 à 2 004, on utilise :

- aucun "4" pour les milliers.
- 200 "4" pour les centaines (dans les 100 nombres qui s'écrivent 4.. et les 100 nombres qui s'écrivent 14..)
- 200 "4" pour les dizaines (dans les 10 nombres qui s'écrivent 4.), les 90 nombres qui s'écrivent .4. (le . de gauche ne peut être 0 et $9 \times 10 = 90$) et les 100 nombres qui s'écrivent 1.4. (de 1040 à 1 499)
- 201 "4" pour les unités (dans le nombre 4, les 9 nombres .4, les 90 nombres ..4, les 100 nombres 1..4 et le nombre 2004).

$$200 + 200 + 201 = 601.$$

601 chiffres "4" sont utilisés pour écrire N .

On peut aussi raisonner ainsi :

On écrit les entiers naturels de 0 à 999 en colonne en ajoutant, si nécessaire, des zéros à gauche :

```

000
001
⋮
099
⋮
999

```

cela donne $3 \times 1000 = 3\ 000$ chiffres. Chacun des 10 chiffres apparaissant le même nombre de fois, il y a donc $3\ 000 \div 10 = 300$ chiffres "4".

Pour écrire les entiers naturels de 1 à 999, il faut 300 chiffres "4" et c'est la même chose pour les entiers naturels de 1000 à 1 999. A ceci, on ajoute le chiffre "4" de 2 004.

Il y a 601 chiffres "4" dans l'écriture de N .

4. **Complément** : formule générale donnant le nombre de chiffres de N , soit $n(N)$, sachant que l'on utilise, pour écrire N , les entiers naturels jusqu'à a , a ayant b chiffres.

On considère, comme précédemment, les nombres entiers naturels écrits jusqu'à a en complétant éventuellement par des zéros pour avoir b chiffres à chaque ligne.

$$\begin{array}{r} 00\dots\dots 000 \\ 00\dots\dots 001 \\ \vdots \\ 00\dots\dots 099 \\ \vdots \\ xy\dots\dots du \leftarrow a \end{array}$$

le tableau ci-dessus est écrit avec $b \times (a + 1)$ chiffres dont 1 zéro pour la colonne de droite, 10 zéros pour la précédente... 10^{b-1} zéros pour la colonne de gauche.

Or, $1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^{b+1}$ est le nombre qui s'écrit $\underbrace{11\dots\dots 1}_{b \text{ chiffres}}$ c'est-

à-dire $\underbrace{99\dots\dots 9}_{b \text{ chiffres}} \div 9$ c'est-à-dire $\frac{10^b - 1}{9}$.

On a donc $n(N) = b(a + 1) - \frac{10^b - 1}{9}$

a est le dernier nombre écrit, b est le nombre de chiffres de a .

Exemple : avec $N = 123\dots\dots 20032004$ $a = 2004$ et $b = 4$.

$$b(a + 1) - \frac{10^b - 1}{9} = 4 \times 2005 - 1111 = 6909.$$

Avec $N = 123\dots 20032004\dots 1000000$; $a = 1\,000\,000$ et $b = 7$.

$$b(a + 1) - \frac{10^b - 1}{9} = 7 \times 1\,000\,001 - 1\,111\,111 = 5\,888\,896$$

COMMENTAIRES

1. **de l'équipe académique** Christine Fenoglio précise que, des quatre exercices « celui qui a été traité majoritairement le premier et a été de loin le mieux réussi est "le nombre de l'année". En fait, cet exercice n'est pas très difficile mais demande beaucoup d'attention pour éviter de tomber dans le piège "piquets-intervalles" de l'utilisation des indices ».

2. de François Lo Jacomo

« Cet exercice peut mener à des dénombrements fastidieux si l'on s'y prend mal, sans que pour autant le résultat soit faux. »

3. de l'équipe « brochure »

Exercice reposant où chacun peut réussir. C'est fort bien dans une épreuve où il faut, par ailleurs, pas mal s'investir !

La seconde méthode de dénombrement proposée pour la question 3 est tout à fait remarquable, d'autant qu'elle doit induire une réflexion sur le fait que tous les chiffres y apparaissent avec la même fréquence.

ANNEXES

1. **Participation** : 165 inscrits ; 123 présents (tous classés).

2. Résultats

Ordre de traitement des exercices					
	1 ^{er} traité	2 ^{ème} traité	3 ^{ème} traité	4 ^{ème} traité	Total
Exo 1	28	8	21	19	76
Exo 2	36	50	12	5	103
Exo 3	56	38	26	0	120
Exo 4	3	21	44	30	98
Total	123	117	103	54	397

Exo 1 : exercice académique des "allumettes"

Exo 2 : exercice national des "nombres échangeables"

Exo 3 : exercice académique du "nombre de l'année"

Exo 4 : exercice national de la feuille de papier.

Moyennes					
Exo 1	Exo 2	Exo 3	Exo 4	Présentation	Total
3,5	7,3	12,0	3,9	0,6	24,0

3. Remarque

L'équipe académique accorde une attention particulière au choix d'exercices n'exigeant pas des notions de Première mal maîtrisées en mars.