

ACADÉMIE DE LYON

D'abord un excellent préambule (Cf. aussi avant-dernière page de Besançon,...)

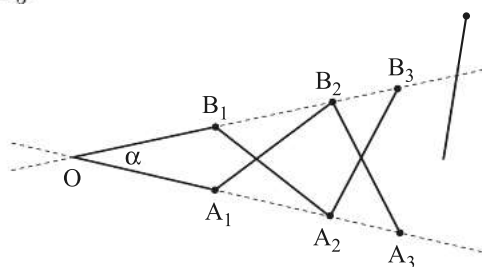
Dans ces quatre exercices, toutes idées ou éléments de démonstration, s'ils sont intéressants et clairement rédigés, seront pris en compte, même s'ils ne conduisent pas à une solution.

PREMIER SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 1)

ÉNONCÉ

On dispose de 7 allumettes, toutes de même longueur, qu'on assimilera pour l'occasion à 7 segments de même longueur, disposées comme indiqué sur le dessin.

La septième allumette n'a pas encore trouvé sa place. Trouver la valeur de l'angle α pour que cette septième allumette relie exactement A_3 et B_3 .



O, A_1, A_2 et A_3 sont alignés.
 O, B_1, B_2 et B_3 sont alignés.

Et si on disposait de $2n + 1$ allumettes, peut-on généraliser ?

SOLUTION 1

1. Il s'agit d'un problème d'angles que l'on peut résoudre assez rapidement à l'aide du tableau suivant en n'utilisant que des triangles isocèles dont les sommets sont les extrémités des allumettes.

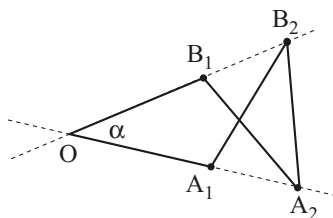
triangle isocèle	mesure en rad angles à la base	mesure en rad angle au sommet	remarques
OB_1A_2 OA_1B_2	α α	$\pi - 2\alpha$ $\pi - 2\alpha$	OB_1A_2 et OA_1B_2 sont isométriques
$B_1A_2B_3$ $A_1B_2A_3$	$\pi - (\pi - 2\alpha) = 2\alpha$ $\pi - (\pi - 2\alpha) = 2\alpha$	$\pi - 4\alpha$ $\pi - 4\alpha$	$B_1A_2B_3$ et $A_1B_2A_3$ sont isométriques
$B_2A_3B_3$ $A_2B_3A_3$	$\pi - (\pi - 4\alpha) - \alpha = 3\alpha$ $\pi - (\pi - 4\alpha) - \alpha = 3\alpha$		

On a donc $\widehat{B_2B_3A_3} = \widehat{B_3A_3A_2} = 3\alpha$ c'est-à-dire (alignement et ordre des points sur les droites) $\widehat{OB_3A_3} = \widehat{OA_3B_3} = 3\alpha$. Les angles du triangle A_3OB_3 ont comme mesures 3α , 3α et α donc $3\alpha + 3\alpha + \alpha = \pi$ d'où $\alpha = \frac{\pi}{7}$.

Conclusion : Pour que la septième allumette relie exactement A_3 et B_3 , il faut et il suffit que $\alpha = \frac{\pi}{7}$

2. Peut-on généraliser ce résultat ?

- S'il y a 3 allumettes, le triangle OA_1B_1 est équilatéral et $\alpha = \frac{\pi}{3}$.
- S'il y a 5 allumettes (la dernière relie A_2 à B_2), les triangles $B_1A_2B_2$ et $A_1B_2A_2$ sont isocèles d'angles à la base 2α , donc en utilisant les angles du triangle A_2OB_2 , $2\alpha + 2\alpha + \alpha = \pi$, c'est-à-dire $\alpha = \frac{\pi}{5}$.



il semble donc probable que, s'il y a $2n + 1$ allumettes, pour que l'on puisse poser toutes les allumettes selon le procédé indiqué et que la dernière allumette relie A_n et B_n , il faut que $\alpha = \frac{\pi}{2n + 1}$.

La justification précise de ce résultat dépasse un peu les compétences des élèves de première pour lesquels l'usage des indices est encore peu familier. Voici deux pistes.

1. Continuer le tableau

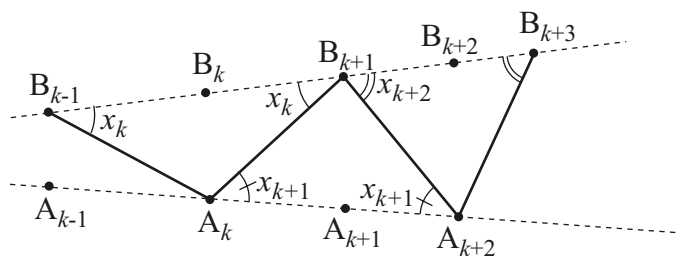
(voir page suivante)

triangle isocèle	mesure en radians angles à la base	mesure en radians angle au sommet
OB_1A_2 et OA_1B_2	α	$\pi - 2\alpha$
$B_1A_2B_3$ et $A_1B_2A_3$	$\pi - (\pi - 2\alpha) = 2\alpha$	$\pi - 4\alpha$
$B_2A_3B_4$ et $A_2B_3A_4$	$\pi - (\pi - 4\alpha) - \alpha = 3\alpha$	$\pi - 6\alpha$
$B_3A_4B_5$ et $A_3B_4A_5$	$\pi - (\pi - 6\alpha) - 2\alpha = 4\alpha$	$\pi - 8\alpha$
$B_4A_5B_6$ et $A_4B_5A_6$	$\pi - (\pi - 8\alpha) - 3\alpha = 5\alpha$	$\pi - 10\alpha$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$B_{n-1}A_nB_{n+1}$ et $A_{n-1}B_nA_{n+1}$	$\pi - (\pi - 2(n-1)\alpha) - (n-2)\alpha = n\alpha$	

Le triangle OA_nB_n est donc isocèle d'angles α , $n\alpha$ et $n\alpha$, ce qui conduit à $\alpha = \frac{\pi}{2n+1}$ (attention aux troisièmes sommets des deux derniers triangles, relier A_n à B_n par la dernière allumette revient à considérer que $A_{n+1} = A_n$ et $B_{n+1} = B_n$).

2. Prouver que la suite des angles à la base de ces triangles isocèles est arithmétique.

Il faut admettre la symétrie de la figure par rapport à la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{B_1OA_1}$ (ce qui n'a jamais été nécessaire jusque là). On note $O = A_0$ et B_0 . Les triangles isocèles $B_{k-1}A_kB_{k+1}$ et $A_{k-1}B_kA_{k+1}$ ($1 \leq k \leq n$) (On rappelle que $A_{n+1} = A_n$ et $B_{n+1} = B_n$) sont isométriques d'angles à la base x_k et on a la disposition suivante :



En utilisant l'angle plat $B_{k-1}B_{k+1}B_{k+3}$, on obtient $x_k + x_{k+2} + (\pi - 2x_{k+1} = \pi)$ soit $x_k + x_{k+2} = 2x_{k+1}$ ou encore $x_{k+2} - x_{k+1} = x_{k+1} - x_k = \dots = x_2 - x_1 = \alpha$. La suite (x_k) ($1 \leq k \leq n$) est donc arithmétique de premier terme α et de raison α , d'où : $x_n = n\alpha$.

Avec les angles du triangle OA_nB_n , on a $\alpha + n\alpha + n\alpha = \pi$, c'est-à-dire $\alpha = \frac{\pi}{2n+1}$.

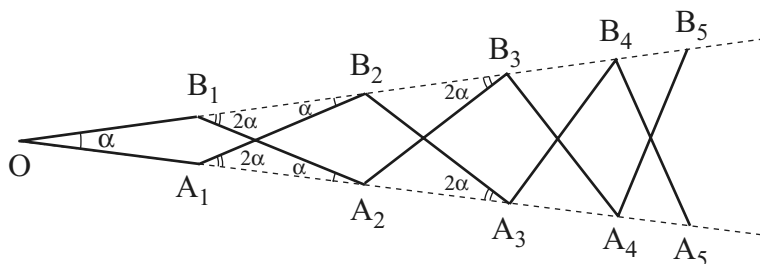
SOLUTION 2 (de F. Lo Jacomo)

Le triangle OA_1B_2 étant isocèle, $\widehat{A_1B_2O} = \alpha$ (tout comme, pour la même raison, $\widehat{B_1A_2O}$, et $\widehat{B_2A_1A_3} = 2\alpha = \widehat{A_2B_1B_3}$). Les triangles $B_1A_2B_3$ et $A_1B_2A_3$ sont eux aussi isocèles, $\widehat{B_3B_1A_2} = 2\alpha = \widehat{A_3A_1B_2}$, $\widehat{B_1A_2B_3} = \pi - 4\alpha = \widehat{A_1B_2A_3}$, donc $\widehat{B_3A_2A_3} = 3\alpha = \widehat{A_3B_2B_3}$. Si la septième allumette relie exactement A_3 et B_3 , les triangles $A_2B_3A_3$ et $B_2A_3B_3$ sont eux aussi isocèles, donc $\widehat{A_2A_3B_3} = 3\alpha = \widehat{B_2B_3A_3}$. Mais comme $\widehat{A_2A_3B_2} = 2\alpha = \widehat{B_2B_3A_2}$, $\widehat{A_2B_3A_3} = \alpha = \widehat{B_2A_3B_3}$. De sorte que la somme des trois angles du triangle $A_2B_3A_3$ vaut 7α , tout comme la somme des trois angles du triangle $B_2A_3B_3$.

On en déduit que α doit être égal à $\pi/7$. Réciproquement, si $\alpha = \pi/7$, en appelant O_2 l'intersection de (B_2A_3) avec (A_2B_3) , l'angle $\widehat{A_3O_2B_3}$ vaut $5\alpha = 5\pi/7$, et par symétrie, le triangle $O_2A_3B_3$ est isocèle, donc $\widehat{A_2B_3A_3} = \widehat{B_2A_3B_3} = \pi/7$, $\widehat{A_2A_3B_3} = \widehat{B_2B_3A_3} = 3\pi/7$ ce qui prouve que les triangles $A_2B_3A_3$ et $B_2A_3B_3$ sont isocèles : $A_3B_3 = A_2B_3 = B_2A_3$ = longueur de la septième allumette. La septième allumette relie exactement A_3 à B_3 .

Le problème se généralise aisément. Montrons par récurrence qu'en tout point B_i ou A_i , $\widehat{A_{i+1}B_iB_{i+1}} = \widehat{B_{i+1}A_iA_{i+1}} = (i+1)\alpha$. Si c'est vrai pour $i < k$, alors $\widehat{A_{k-1}B_kB_{k-2}} = \widehat{A_{k-1}B_{k-2}B_k}$ (triangle isocèle) $= (k-1)\alpha$ (hypothèse de récurrence).. De même $\widehat{B_kA_{k+1}A_{k-1}} = \widehat{B_kA_{k-1}A_{k+1}} = k\alpha$, donc $\widehat{A_{k-1}B_kA_{k+1}} = \pi - 2k\alpha$, et $\widehat{A_{k+1}B_kB_{k+1}} = (k+1)\alpha$, ce qui achève la récurrence.

A la $(2n+1)$ ème allumette, on démontre comme ci-dessus : $\widehat{B_nO_{n-1}A_n} = (2n-1)\alpha$, donc $\widehat{A_{n-1}B_nA_n} = \frac{(\pi - (2n-1)\alpha)}{2}$ et $\widehat{A_{n-1}A_nB_n} = \frac{\pi - \alpha}{2}$. Pour que le triangle $A_{n-1}B_nA_n$ soit isocèle, il faut et il suffit que $n\alpha = \frac{\pi - \alpha}{2}$, soit $\alpha = \frac{\pi}{2n+1}$.

VARIANTE d'exposition par Henri Bareil

La symétrie par rapport à la bissectrice de l'angle crée d'autres triangles isocèles OA_iB_i que ceux dus aux allumettes successives d'une même chemin ($OB_1A_2B_3A_4\dots$) et reproduit les angles des A_i en B_i .

On clôture avec trois allumettes si et seulement si $B_2=B_1$ (identiquement : $A_1 = A_2$), c'est-à-dire OA_1B_2 isocèle d'angle à la base α , soit $3\alpha = \pi$.

On clôture avec cinq allumettes si et seulement si $B_3 = B_2$, c'est-à-dire OA_2B_3 isocèle d'angle à la base 2α . Soit $5\alpha = \pi$.

Nous voyons apparaître une loi de formation des angles successifs :

Angle extérieur en B_1 du triangle OB_1A_2 (soit $\widehat{yB_2A_3}$)

= angle intérieur en B_3 du triangle OA_2B_3

= angle intérieur du triangle OA_3B_2 .

D'où angle extérieur en B_2 du triangle OA_3B_2 (soit $\widehat{yB_2A_3}$)

= angle intérieur en $A_3 + \alpha$

Donc $\widehat{yB_2A_3} = \widehat{yB_1A_2} + \alpha$. Idem pour la suite...

Il s'ensuit qu'en ajoutant deux allumettes, on passe d'un triangle isocèle de clôture de sommet O au suivant en majorant chaque angle à la base de α , donc la somme des angles de ce triangle de 2α . D'où la suite arithmétique.

COMPLÉMENT, de Christine Fenoglio

Dans le cas où il y a 3 allumettes, $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

Dans le cas où il y a 5 allumettes de longueur ℓ ,

$$OA_2 = 2\ell \cos \frac{\pi}{5}, \quad A_1A_2 = 2\ell \cos \frac{2\pi}{5}$$

$$\text{Or } OA_2 \cdot A_1A_2 = OA_1 = \ell \text{ d'où } \cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}$$

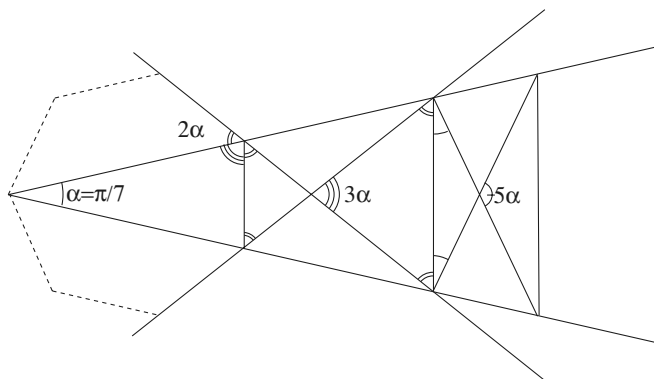
Dans le cas où il y a 7 allumettes de longueur ℓ

$$OA_2 = 2\ell \cos \frac{\pi}{7} ; A_1A_3 = 2\ell \cos \frac{2\pi}{7} ; A_2A_3 = 2\ell \cos \frac{3\pi}{7}$$

or $OA_2 + A_2A_3 = OA_3$ donc $OA_2 - A_1A_3 + A_2A_3 = OA_1$ c'est-à-dire

$$\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2} \dots$$

On peut aussi relier le problème à l'heptagone régulier comme le suggère la figure ci-dessous :



COMMENTAIRES

1. (transmis par Ch. Fenoglio)

« Très peu de candidats sont arrivés au résultat $\alpha = \frac{\pi}{7}$ car ils n'ont pas reconnu un problème de mesures d'angles, mais ont essayé de "plaquer" de la trigonométrie et la formule d'Al Kashi, ce qui aboutissait très vite à des formules inextricables et des équations trigonométriques insolubles à leur niveau. »

Certains arrivent aux angles de mesures 2α et 3α , ce qui fait 90% du travail, mais ne concluent pas avec le grand triangle OA_3B_3 .

2. de François Lo Jacomo

J'ai bien aimé ce premier exercice, d'une part parce qu'il s'agit de raisonnements élémentaires sur des triangles isocèles alors qu'à la lecture de l'énoncé, on peut craindre des calculs trigonométriques compliqués, d'autre part car il suggère un appareillage astucieux permettant de comparer un angle à $\frac{\pi}{2n+1}$ pour n quelconque.

3. de l'équipe « brochure »

Très bel exercice, facile à comprendre si (et seulement si ?) on procède par étapes : clôture avec trois allumettes, avec cinq, ... Avec une belle