

Si $b = 2$ la condition se traduit par $20a + 2 < 50$, a peut donc prendre les valeurs 1 ou 2.

Si $b = 3$ la condition se traduit par $20a + 3 < 34$, a peut donc prendre la valeur 1.

Si $b = 4$ la condition se traduit par $20a + 4 < 25$, a peut donc prendre la valeur 1.

Si $b \geq 5$ la condition se traduit par $20a + b < 20$, donc il n'y a pas de valeur de a possible.

2°) On pose $N = 10a + b$ avec b entier compris entre 1 et 9.

$$N^2 = 100a^2 + 20ab + b^2.$$

On cherche à voir si N^2 peut s'écrire $100(a+k)^2 + c$ avec $c < 100$ et $k \geq 1$.

En commençant par $k = 1$, le problème se traduit par la condition : $20ab + b^2 \geq 100(2a+1)$.

Comme $9 \geq b$, on a $180a + 81 \geq 20ab + b^2$, on en déduit avoir $180a + 81 \geq 200a + 100$.

Comme a est un entier positif, cette inéquation n'a pas de solution.

Comme on ne peut pas avoir $(a+1)^2$ centaines pour N^2 , on ne pourra jamais avoir $(a+k)^2$ centaines pour N^2 .

COMMENTAIRE (rédaction de la brochure)

Joli sujet de réflexion.

DEUXIÈME SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 4)

ÉNONCÉ

Au triplet (a, b, c) de nombres réels, on fait correspondre le triplet $(a+b, b+c, c+a)$ et on réitère le procédé.

Par exemple, avec $(2, -1, 0.5)$, on trouve successivement $(1, -0.5, 2.5)$ $(0.5, 2, 3.5)$ $(2.5, 5.5, 4) \dots$

Est-il possible, au bout d'un certain nombre d'opérations, de retrouver le triplet de départ ? Au bout de combien d'opérations ?

SOLUTION

On remarque qu'à chaque étape, la somme des trois nombres obtenus est doublée. Au bout de n étapes, la somme est multipliée par 2^n . Pour retrouver la somme initiale, il faut avoir : $(a+b+c) \times 2^n = a+b+c$

c'est-à-dire $a + b + c = 0$. Cette condition est nécessaire.

Plaçons-nous dans ce cas :

$$X_1 = (a, b, c) = (a, b, -a - b)$$

$$X_2 = (a + b, -a, -b)$$

$$X_3 = (b, -a - b, a)$$

$$X_4 = (-a, -b, a + b)$$

$$X_5 = (-a - b, a, b)$$

$$X_6 = (-b, a + b, -a)$$

$$X_7 = (a, b, -a - b)$$

$X_7 = X_1$: au bout de 6 opérations, on retrouve le triplet de départ.

REMARQUE per F. L JACOMO

Après avoir traité le problème comme ci-dessus, F. Lo Jacomo ajoute :
« On peut retrouver le triplet au bout d'une opération si $a = -c$, $b = -a$, $c = -b = a = -c$, donc $a = b = c = 0$; au bout de 2 opérations si $a = b = c$, mais compte tenu que $a + b + c = 0$, cela nécessite une fois encore : $a = b = c = 0$. De même pour 3, 4 ou 5 opérations. »

SOLUTION CALCULATRICE d'André GUILLEMOT

Prenons un triplet quelconque, par exemple 1, 3, 6 que l'on entre dans sa calculatrice.

Appliquons le procédé itératif donné à l'aide de la fonction ANS :

$\text{Ans}(1) + \text{Ans}(2)$, $\text{Ans}(2) + \text{Ans}(3)$, $\text{Ans}(3) + \text{Ans}(1)$.

En appuyant trois fois sur la touche ENTER, on obtient les triplets $\{4, 9, 7\}$, $\{13, 16, 11\}$, $\{29, 27, 24\}$.

On constate que les nombres augmentent de plus en plus (la somme double à chaque itération), donc **une condition nécessaire pour retrouver le triplet initial est que la somme des trois nombres soit égale à 0.**

Reprenons notre manipulation avec des triplets dont la somme des termes vaut 0.

Avec $\{1, 2, -3\}$, on obtient $\{3, -1, -2\}$, $\{2, -3, 1\}$, $\{-1, -2, 3\}$, $\{-3, 1, 2\}$, $\{-2, 3, -1\}$, $\{1, 2, -3\}$.

Avec $\{5, -3, -2\}$, on obtient $\{2, -5, 3\}$, $\{-3, -2, 5\}$, $\{-5, 3, 2\}$, $\{-2, 5, -3\}$, $\{3, 2, -5\}$, $\{5, -3, -2\}$.

Il semble que la condition soit suffisante et que le triplet de départ soit obtenu après 6 opérations. Montrons-le dans le cas général. a et b étant

deux réels, on part du triplet $\{a, b, -a-b\}$ et on obtient, dans l'ordre, les triplets suivants : $\{a+b, -a, -b\}$, $\{b, -a-b, a\}$, $\{-a, -b, a+b\}$, $\{-a-b, a, b\}$, $\{-b, a+b, -a\}$, $\{a, b, -a-b\}$.

Conclusion :

On retrouve le triplet de départ si et seulement si la somme de ses termes vaut 0, et ceci en 6 opérations.

COMMENTAIRE (rédaction de la brochure)

Il fallait avoir le réflexe, assez évident semble-t-il, de s'intéresser à la somme.

Cela étant, l'exercice est facile.

Un bon choix d'exercices !