

LIMOGES

PREMIER SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 3)

ÉNONCÉ

Le nombre 60 a pour carré 3 600 ; si on enlève les deux derniers chiffres de ce carré, on obtient le nombre 36 qui est lui-même un carré ; ceci est valable si on remplace 60 par n'importe quel nombre divisible par 10.

Le nombre 31 a pour carré 961 ; si on enlève les deux derniers chiffres de ce carré, on obtient le nombre 9 qui est lui-même un carré, on peut donc écrire : $31^2 = 3^2 \times 10^2 + 61$.

Trouver tous les nombres entiers non multiples de 10, tels que si on enlève les deux derniers chiffres du carré, on obtient encore un carré.

SOLUTION

$$x^2 = 100q^2 + r \text{ avec } 1 \leq r \leq 99 \text{ donc } (x - 10q)(x + 10q) = r$$

$$x - 10q = r_1 \text{ et } x + 10q = r_2 \text{ avec } 1 \leq r_1 r_2 \leq 99$$

$$2x = r_1 + r_2 \text{ et } 20q = r_2 - r_1. \quad r_2 - r_1 \text{ est un multiple de 20.}$$

r_1	r_2	x	x^2
1	21	11	121
2	22	12	144
3	23	13	169
4	24	14	196
1	41	21	441
2	42	22	484
1	61	31	961
1	81	41	1681

VARIANTE de présentation (par F. LO JACOMO)

« si l'on enlève les deux derniers chiffres de n^2 , on obtient k^2 » signifie que n^2 est compris entre $100.k^2$ et $100.k^2 + 99$, donc que :

$$n^2 - 100.k^2 = (n - 10k)(n + 10k) \text{ est strictement inférieur à } 100.$$

$$\text{si } n - 10k = 1, n + 10k = 20k + 1 < 100, \text{ donc } k \leq 4;$$

$$\text{si } n - 10k = 2, n + 10k = 20k + 2 < 50, \text{ donc } k \leq 2;$$

$$\text{si } n - 10k = 3, 20k + 3 < \frac{100}{3} : k \leq 1, \text{ et de même si } n - 10k = 4. \text{ Si l'on exclut } k = 0 \text{ (peut-on enlever les deux derniers chiffres de 36 ou de 9?),}$$

on ne peut pas avoir $n - 10k \geq 5$, car cela nécessiterait que $20k + 5 \leq 20$.

Les nombres cherchés sont donc : 11, 21, 31 et 41 ; 12 et 22 ; 13 et 14.

RÉSOLUTION AVEC UNE CALCULATRICE (A. GUILLEMOT)

Commençons par trouver tous les nombres entre 11 et 100, non multiples de 10 répondant aux conditions du problème à l'aide du programme suivant :

Pour N variant de 11 à 100
Partie entière de $N^2/100$ en mémoire A.
 $\sqrt{A}$ en mémoire B.
si la partie décimale de B vaut 0 et
si celle de $N/10$ est différente de 0
Afficher N et N^2 .

```
PROGRAM: LIMOGES
:For(N,11,100)
:iPart(N^2/100)→A
:√(A)→B
:If fPart(B)=0 a
nd fPart(N/10)≠0
:Disp (N,N^2)
:End■
```

Nous obtenons les résultats suivants :

{11,121} ; {12, 144} ; {13, 169} ; {14, 196} ; {21, 441} ; {22, 484} ;
31, 961} et {41, 1681}.

Sur ces exemples, on constate que le nombre de centaines du carré du nombre recherché est toujours le carré du nombre des dizaines.

On est amené à se poser deux questions :

1°) Quels sont les nombres dont le nombre de centaines du carré est le carré du nombre de dizaines ?

2°) Peut-on avoir un nombre dont le nombre de centaines du carré soit supérieur au carré du nombre de dizaines ?

Réponse :

1°) On pose $N = 10a + b$ avec b entier compris entre 1 et 9.

$$N^2 = 100a^2 + 20ab + b^2.$$

Pour avoir le nombre de centaines de N^2 égal à a^2 , il faut et il suffit que $20ab + b^2 < 100$ ou $b(20a + b) < 100$.

Essayons les valeurs possibles de b :

Si $b=1$ la condition se traduit par $20a + 1 < 100$, a peut donc prendre les valeurs 1, 2, 3 ou 4.