

seulement si $E = S = 0$ ($N = N'$ est palindrome) - , 9, 18, 27 et 36, compte tenu que la valeur 45 est exclue car le seul nombre de 5 chiffres dont la somme des chiffres est 45, 99 999, n'est pas divisible par 99. La manière la plus simple de déterminer les cas où S prend une de ces valeurs est malheureusement d'étudier systématiquement tous les cas à la calculatrice. La valeur 9 ne peut pas être atteinte, mais les quatre autres le sont : 0 si $E = S = 0$, soit $a = e$ et $b = d$ (par exemple $N = 12\ 321$), 18 si $a = e$ et $b \neq d$ (par exemple $N = 54\ 325$) ou si $b < d$ (par exemple $N = 52\ 341$), 36 si $b = d$, $a > e$ (par exemple $N = 21\ 111$) et 27 sinon, donc si $b > d$, $a > e$. Faut-il démontrer ces résultats ?

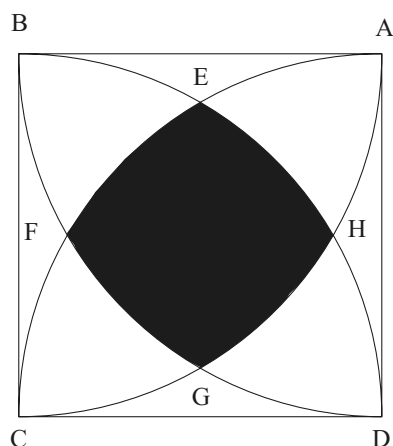
DEUXIÈME SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 4)

ÉNONCÉ

Le vitrail

Un vitrail est formé d'un carré ABCD de côté a et de quatre quarts de cercle centrés respectivement aux sommets du carré et de rayon a comme l'indique la figure. La partie centrale est un quadrilatère curviligne EFGH.

Déterminer l'aire de ce quadrilatère curviligne en fonction de a .



SOLUTION 1

1. Les symétries permettent d'affirmer que les triangles curvilignes AEH, BFE, CGHF et DHG ont une aire commune y ; de même les triangles curvilignes ABE, BCF, CDG et DAH ont une aire commune z .

Soit x l'aire du quadrilatère curviligne EFGH, c'est-à-dire l'aire cherchée.

• L'aire du carré est a^2 d'où $x + 4y + 4z = a^2$.

• L'aire du quart de disque ABD centré en A est $\frac{\pi}{4} a^2$

d'où $x + 3y + 2z = \frac{\pi}{4} a^2$

• L'aire du triangle équilatéral CDE est $\frac{\sqrt{3}}{4} a^2$.

- L'aire du secteur circulaire CDE est $\frac{\pi}{6} a^2$.

L'aire du triangle curviligne CDE est

$$x + 2y + z = 2 \left(\frac{\pi}{6} a^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \right) + \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

soit $x + 2y + z = \frac{\pi}{3} a^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$.

On obtient donc le système d'inconnues x, y et z dans lequel on ne recherche que x :

$$\begin{cases} x + 4y + 4z = a^2 \\ x + 3y + 2z = \frac{\pi}{4} a^2 \\ x + 2y + z = \frac{\pi}{3} a^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \end{cases}$$

qui conduit à $x = \left(1 + \frac{\pi}{3} - \sqrt{3}\right) a^2$.

SOLUTION 2

Les symétries permettent d'affirmer que les triangles du type AEH sont équilatéraux et que le quadrilatère EFGH est un carré. Soit d le côté de ces triangles et du carré.

- L'aire du carré est d^2 .
- L'aire du secteur circulaire DEF est $\frac{\pi}{12} a^2$.

- L'aire du triangle DEF est $\frac{d^2}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

- L'aire du segment circulaire EF est $\frac{\pi}{12} a^2 - \frac{d^2}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

- L'aire cherchée est :

$$\begin{aligned} d^2 + 4 \left(\frac{\pi}{12} a^2 - \frac{d^2}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right) &= d^2 + \frac{\pi}{3} a^2 - d^2 (2 + \sqrt{3}) \\ &= \frac{\pi}{3} a^2 - d^2 (1 + \sqrt{3}) \end{aligned}$$

Calcul de d :

à l'aide de la diagonale $AC = a\sqrt{2} = d + d\sqrt{3} = (1 + \sqrt{3}) d$

D'où $d = \frac{(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{2} a$ et on retrouve le même résultat que précédemment.

2. Résultats :

Les candidats ont fait preuve de logique, de bon sens et d'astuce, mais ils sont terriblement handicapés par les calculs et ne sont pas en mesure d'apprécier un ordre de grandeur. Les raisonnements sont intuitifs et manquent de justification. Il y a confusion entre implication et équivalence, tout particulièrement lorsqu'il s'agit d'élever au carré les deux membres d'une inégalité sans se soucier de la validité de la méthode ni du sens à donner au résultat. Le dernier exercice (exercice 4, académique) est rarement abordé avec succès, les candidats ne sachant pas exploiter les symétries de la figure.

3. Classement :

Tous les élèves ont été classés. Voici les six premiers :

1	Laura Corman	Lycée Jeannine Manuel (Marcq-en-Bareuil)
2	Lucien Bertin	lycée du Noorderover (Grande Syn)
3	Océane Fremaux	lycée Condorcet (Lens)
	Alexis Louart	lycée St Paul (Lens)
4	Guillaume de Cagny	lycée St Paul (Lille)
5	Michael Gongalves	lycée St Paul (Lille)