

LILLE

PREMIER SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 2)

ÉNONCÉ

Des nombres renversants

1- Soit N un nombre de trois chiffres, on le « renverse » c'est-à-dire : on lui associe le nombre N' obtenu en échangeant les chiffres des unités et des centaines puis on calcule l'écart E entre ces deux nombres.

On a donc $E = |N - N'|$.

Par exemple : $N = 357$, $N' = 753$ et $E = 396$.

Combien de nombres E différents peut-on obtenir quand N varie ?

Préciser les valeurs prises par la somme S des chiffres de E .

2- On recommence l'expérience avec un nombre N de 5 chiffres, le nombre N' est donc obtenu en échangeant le chiffre des unités avec celui des dizaines de milles, puis celui des dizaines avec celui des milles. Par exemple $N = 97531$, $N' = 13579$ et $E = 83952$.

Combien de nombres E différents peut-on obtenir quand N varie ?

Quelles sont les valeurs possibles pour la somme S des chiffres de E et dans quels cas obtient-on ces différentes valeurs ?

SOLUTION (éléments)

1- On pose $N = \overline{a_2 a_1 a_0}$, on peut se limiter au cas où $a_2 \geq a_0$

$E = (a_2 - a_0) \times 99$, c'est un multiple de 9 donc S également. Pour $(a_2 - a_0)$, comme pour E , il y a **10 possibilités**.

Si $a_2 = a_0$ alors $E = 0$ et $S = 0$

Sinon, comme

$E = (a_2 - a_0 - 1) \times 100 + 9 \times 10 + (10 - a_2 + a_0)$, $0 \leq a_2 - a_0 - 1 \leq 8$ et $1 \leq 10 - a_2 + a_0 \leq 9$ et on déduit que $S = 18$.

2- On pose $N = \overline{a_4 a_3 a_2 a_1 a_0}$. On peut se limiter au cas $a_4 \geq a_0$.

$E = |(a_4 - a_0) \times 9999 + (a_3 - a_1) \times 990|$, c'est un multiple de 9 donc S également.

- si $a_4 = a_0$, $E = |a_3 - a_1| \times 990$. On a alors 10 possibilités.

- si $a_4 > a_0$, $E = (a_4 - a_0) \times 9999 + (a_3 - a_1) \times 990$. On a alors, pour $(a_4 - a_0)$, 9 possibilités et 19 pour $(a_3 - a_1)$.

Soit au total $19 \times 9 + 10 = 181$ possibilités pour E .

En effet, si $9999X + 990Y = 9999X' + 990Y'$ alors $101(X - X') = 10(Y' - Y)$. Le chiffre des unités de $101(X - X')$ doit être 0, or $(X - X')$ est un entier compris entre -9 et 9, donc $X = X'$ et $Y = Y'$.

A partir d'observations de résultats obtenus à l'aide de la calculatrice, on conjecture puis justifie les différentes expressions de E toujours sous l'hypothèse $a_4 \geq a_0$.

$$E = (a_4 - a_0) \times 10\,000 + (a_3 - a_1 - 1) \times 1\,000 + 9 \times 100 + (9 - a_3 + a_1) \times 10 + (10 - a_4 + a_0).$$

• Si $a_4 \neq a_0$ et $1 \leq a_3 - a_1 \leq 9$, alors $S = 27$ (exemple $N = 96\,721$)

• Si $a_4 \neq a_0$ et $a_3 = a_1$ alors

$$E = (a_4 - a_0) \times 9999 = (a_4 - a_0 - 1) \times 10\,000 + 9 \times 1\,000 + 9 \times 100 + 9 \times 10 + (10 - a_4 + a_0) \text{ et on obtient } S=36. \text{ (exemple } N = 59\,792).$$

• Si $a_4 \neq a_0$ et $-9 \leq a_3 - a_1 \leq -1$, on écrit

$$E = (a_4 - a_0 - 1) \times 10\,000 + (10 + a_3 - a_1) \times 1\,000 + (-a_3 + a_1 - 1) \times 10 + (10 - a_4 + a_0). \text{ On obtient } S=18. \text{ (exemple } N = 36\,191).$$

• Enfin, si $a_4 = a_0$ on se ramène au cas des nombres à trois chiffres : $S = 0$ ou $S = 18$.

Pour $S = 0$, on a $N = N'$ (exemple $N = 95\,459$).

VARIANTE RÉDACTIONNELLE par F. Lo Jacomo

$N = 100a + 10b + c$, donc $N' = 100c + 10b + a$, $|N - N'| = 99|a - c|$ peut prendre 10 valeurs distinctes dans la mesure où $|a - c|$ peut prendre toutes les valeurs de 0 (si $N = N'$: nombres palindromes) à 9 (si $c = 0$, par exemple $N = 910$). Si $|a - c| = t > 0$, alors le deuxième chiffre de $99t = 100t - t > 100t - 10$ est nécessairement 9, et comme $E = 99t$ est divisible par 9, la somme des deux autres chiffres doit être multiple de 9, elle ne peut pas être 18 car 999 n'est pas multiple de 99, donc hormis si $|a - c| = 0$ (auquel cas $E = S = 0$), $S = 18$.

$$2- N = 10\,000a + 1000b + 100c + 10d + e$$

$$N' = 10\,000e + 1000d + 100c + 10b + a, \text{ donc}$$

$$N - N' = 9\,999(a - e) + 990(b - d) = 99[101(a - e) + 10(b - d)]$$

Quitte à remplacer N par N' , on peut supposer $N \geq N'$, donc $E = N - N'$. $a - e$ peut prendre toutes les valeurs de 9 à 0, et $b - d$ toutes les valeurs de 9 à -9 si $a - e > 0$, de 9 à 0 si $a - e = 0$. Pour $a = e$, E peut prendre dix valeurs, et pour $a - e > 0$, E peut prendre $9 \times 19 = 171$ valeurs. En tout, E peut prendre 181 valeurs, la valeur 0 si N est palindrome, et 180 autres valeurs.

La somme des chiffres de E peut *a priori* prendre 5 valeurs, 0 -si et