

SOLUTION 2 (de F. Lo Jacomo)

$$n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n-1)(n+1)n^2 + 1)$$

L'un des entiers n ou $n-1$ est pair, donc le produit est obligatoirement pair.

Par ailleurs, si ni n , ni $n-1$, ni $n+1$ ne sont divisibles par 5, n s'écrit $5k+2$ ou $5k+3$, et $n^2+1 = 25k^2+20k+5$ ou $25k^2+30k+10$ est divisible par 5. Dans tous les cas, le produit est pair et divisible par 5, il est donc toujours divisible par 10.

REMARQUES

1- Le théorème selon lequel si a et b sont premiers entre eux, pour qu'un nombre soit divisible par ab , il faut et il suffit qu'il le soit séparément par a et b n'est pas connu en Première.

2- Les deux dernières démonstrations ne font pas intervenir $n+1$. Donc est divisible par 10 le produit $n(n-1)(n^2+1)$, c'est-à-dire $n^4-n^3+n^2-n$. Mais on aurait pu raisonner avec $n(n+1)$ comme on l'a fait pour $n(n-1)$. Voici donc un autre produit divisible par 10 : $n(n+1)n^2+1$, c'est-à-dire $n^4+n^3+n^2+n$.

COMMENTAIRE (rédaction de la brochure)

Voilà un exercice simple qui peut donner confiance...

DEUXIÈME SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 3)**ÉNONCÉ**

$\mathcal{C}$ est un cercle de centre O . A est un point fixe situé à l'intérieur de ce cercle. M est un point mobile sur le cercle.

1°) Déterminer la (ou les) position(s) de M pour que l'aire du triangle AOM soit maximale.

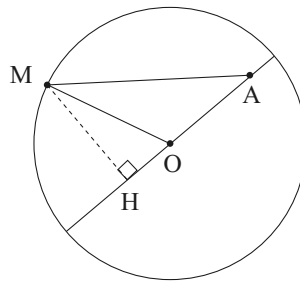
2°) Déterminer la (ou les) position(s) de M pour que l'angle $\widehat{OMA}$ soit maximal.

SOLUTION du 1^o

On peut remarquer que si l'aire du triangle AOM est maximale ou si l'angle $\widehat{OMA}$ est maximal, pour une position de M alors c'est aussi vrai pour la position symétrique par rapport à la droite (OA).

Soit r le rayon du cercle et $d = OA$.

1^o) Dans le triangle MAO, soit H le pied de la hauteur issue du sommet M. MH est comprise entre 0 et r .

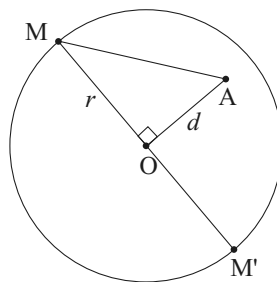


L'aire du triangle MAO est égale au demi produit de MH par OA .

Les points O et A étant fixés, l'aire du triangle MAO sera maximale pour MH maximale, c'est-à-dire pour $MH = r$. Cela se produit pour H confondu avec O.

Les positions de M pour lesquelles l'aire du triangle MAO est maximale sont celles pour lesquelles le triangle est rectangle en O.

Il y a deux positions de M, qui sont à l'intersection du cercle avec la perpendiculaire à la droite (OA) en O.



L'aire maximale est égale à $\frac{1}{2}rd$.

SOLUTION 2 du 1^o

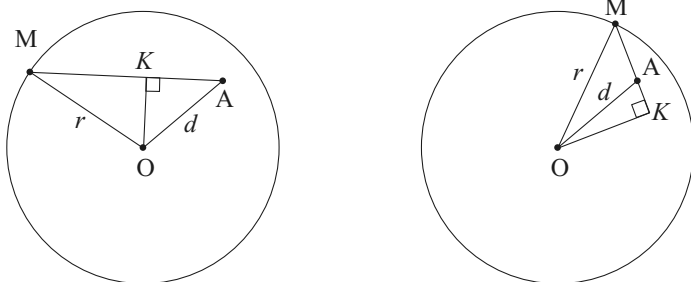
L'aire du triangle MAO est donnée par :

$$\frac{1}{2} OM \times OA \times \sin(\widehat{MOA}) = \frac{1}{2} rd \sin(\widehat{MOA})$$

r et d étant fixés, et l'angle $\widehat{MOA}$ étant compris entre 0° et 180° , l'aire maximale est obtenue pour $\sin(\widehat{MOA}) = 1$, c'est-à-dire lorsque le triangle MAO est rectangle en O. Il y a deux positions possibles pour M.

SOLUTION du 2^o

Soit K le projeté orthogonal de O sur la droite (MA).

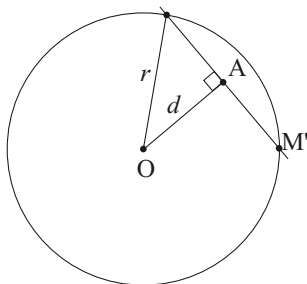


OK , distance du point O à la droite (MA), est comprise entre 0 (cas où les points M, O et A sont alignés) et d (cas où la droite (MA) est perpendiculaire à la droite (OA)).

$$\sin(\widehat{OMA}) = \sin(\widehat{OMK}) = \frac{OK}{OM} = \frac{OK}{r} \quad (*)$$

Comme le point A est intérieur au cercle, l'angle $\widehat{OMA}$ est compris entre 0° et 90° . Il est maximal lorsque son sinus l'est. $\sin(\widehat{OMA})$ est maximal lorsque OK est maximale.

Lorsque le point M décrit le cercle, la plus grande distance de O à la droite (MA) est obtenue pour $OK = OA = d$ c'est-à-dire lorsque la droite (MA) est perpendiculaire à la droite (OA). Il y a deux positions de M, qui sont à l'intersection du cercle avec la perpendiculaire à la droite (OA) en A.



Le plus grand angle sous lequel est vu un segment $[OA]$ de longueur d et

intérieur à un cercle de centre O et de rayon r , d'un point de ce cercle est $\sin^{-1} \left(\frac{d}{r} \right)$

Une variante de la solution à partir de (*)

Dans le triangle OKA, on a : $OK = OA \times \sin(\widehat{OAK})$.

Ce qui permet d'écrire : $\sin(\widehat{OMA}) = \frac{OA}{r} \sin(\widehat{OAK}) = \frac{d}{r} \sin(\widehat{OAK})$

Comme le point A est intérieur au cercle, l'angle $\widehat{OMA}$ est compris entre 0° et 90° . Il est maximal lorsque son sinus l'est.

d et r étant fixés, $\sin(\widehat{OMA})$ est maximal lorsque $\sin(\widehat{OAK})$ est égal à 1, c'est-à-dire lorsque l'angle $\widehat{OAK}$ est un angle droit. Cela se produit pour K confondu avec A.

Une variante utilisant directement la loi des sinus (proposée par Arthur Vespuce)

La loi des sinus dans le triangle AOM permet d'écrire

$$\frac{\sin(\widehat{OMA})}{OA} = \frac{\sin(\widehat{MAO})}{OM} \Rightarrow \frac{\sin(\widehat{OMA})}{d} = \frac{\sin(\widehat{MAO})}{r}$$

d'où : $\sin(\widehat{OMA}) = \frac{d}{r} \sin(\widehat{MAO})$ (**)

Comme le point A est intérieur au cercle, l'angle $\widehat{OMA}$ est compris entre 0° et 90° . Il est maximal lorsque son sinus l'est.

D'après (**), $\sin(\widehat{OMA})$ est maximal lorsque $\sin(\widehat{MAO})$ est égal à 1, c'est-à-dire lorsque l'angle $\widehat{MAO}$ est droit.

COMMENTAIRE (rédaction de la brochure)

Sujet agréable.

ANNEXES

1. Participation

« En hausse, 141 participants sur 198 inscrits.

Il s'agit surtout d'élèves de première S. Cela tient au fait que les Olympiades sont ouvertes à tout le monde et qu'il n'y a pas de sélection de la part des enseignants.

Une caractéristique de l'académie : la participation des filles (85) dépasse

très nettement celle des garçons (56). De plus, elles tiennent la tête du palmarès. »

Six centres d'examen. Dix lycées représentés (sur 14).

2. Choix des exercices académiques

« Les exercices académiques ont été choisis pour permettre aux élèves de les aborder de la manière la plus ouverte. Ils ne font pas appel à des outils sophistiqués et peuvent être résolus avec des outils du collège. »

3. Résultats

« Les élèves ont, en général, trouvé les exercices faciles, intéressants, les énoncés clairs et surtout accessibles. Ils sont presque tous restés quatre heures.

On peut noter une baisse de la qualité et du niveau des copies des candidats. La cellule académique n'a pu classer que 12 élèves contre 20 l'année dernière. On constate de plus en plus que les élèves ne démontrent pas, se contentent d'affirmer des résultats et sont capables d'écrire des choses aberrantes sans être choqués. Certains élèves montrent sur un ou deux exemples et généralisent hâtivement le résultat. Ils éprouvent des difficultés à distinguer condition nécessaire et condition suffisante. »

4. Prix

12 élèves ont été primés (7 filles et 5 garçons).

1	Katia Belenus	médaille d'or	lycée de Baimbridge
	Joseph Hajjar	médaille d'or	lycée de Versailles
3	Carole Gombauld	médaille d'argent	lycée de Baimbridge
	Antoine Jouberton	médaille d'argent	lycée de Versailles
	Aude Thibaudier	médaille d'argent	lycée Rivière des Pères
	Sarah Benoît	médaille d'argent	lycée Gerville Réache
	Mickaël Coupau	médaille d'argent	lycée Gerville Réache