

LA GUADELOUPE

PREMIER SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 2)

ÉNONCÉ

Montrer que, pour tout n entier naturel, $(n^5 - n)$ est divisible par 10, c'est-à-dire se termine par un zéro.

SOLUTION 1 (de Thierry de Pereti)

On peut le vérifier en utilisant le fait que le chiffre des unités d'un produit de deux entiers naturels est égal au chiffre des unités du produit des chiffres des unités de chacun des facteurs.

Chiffre des unités de n	Chiffre des unités de n^2	Chiffre des unités de n^3	Chiffre des unités de n^4	Chiffre des unités de n^5	Chiffre des unités de $(n^5 - n)$
0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	0
2	4	8	6	2	0
3	9	7	1	3	0
4	6	4	6	4	0
5	5	5	5	5	0
6	6	6	6	6	0
7	9	3	1	7	0
8	4	2	6	8	0
9	1	9	1	9	0

Variante

$$\begin{aligned}
 n^5 - n &= n(n^4 - 1) \\
 &= n(n^2 - 1)(n^2 + 1) \\
 &= n(n - 1)(n + 1)(n^2 + 1)
 \end{aligned}$$

Si n se termine par 0 ou 5, $n(n - 1)$ est divisible par 10.

Si n se termine par 9 ou 1 ou 4 ou 6, $n(n - 1)(n + 1)$ est divisible par 10.

Si n se termine par l'un des autres chiffres, alors $n(n - 1)$ est divisible par 2 tandis que $n^2 + 1$ (voir le tableau ci-dessus) se termine par 5 ou 0, donc est divisible par 5.

Dans tous les cas, la décomposition en facteurs de $n^5 - n$ admet les facteurs 2 et 5. D'où...