

P_1P_2 étant assez petit par rapport à x , le cercle est « presque » tangent à (P_1P_2) , et si l'on appelle P le milieu de $[P_1P_2]$, $\widehat{PJC}$ vaut presque 45° , or l'angle de 45° joue un rôle important dans ce genre de sport : pour que le ballon aille le plus loin possible, il faut qu'il fasse un angle de 45° avec le sol au décollage.

N.D.L.R.

1. Reprenons à partir de l'arc capable P_1JP_2 de centre O . Voici une variante pour la suite : $\widehat{P_1JP_2} = \frac{1}{2}\widehat{P_1OP_2}$. Or P_1OP_2 est un triangle isocèle de base $[P_1P_2]$. L'angle au sommet est maximal lorsque OP_1 est minimal. Pour cela, il faut et il suffit que le cercle P_1JP_2 soit tangent à (CC') .

2) Les raisonnements géométriques évitent les calculs du a) et d'une dérivée. Ils permettent le calcul de ψ par $\tan \widehat{IOP_1} = \frac{d_2 - d_1}{2x}$.

COMMENTAIRES (rédaction de la brochure)

L'exercice, agréable par la situation « football » proposée, est marquée par un côté calculatoire, surtout si l'on respecte l'énoncé à propos de la dernière question.

Ces questions d'arcs capables et d'angle maximum sont assez classiques. En 2003, le sujet Olympiades de Paris en débattait à propos de rugby (Cf. Brochure APMEP n° 158, pages 131-133).

DEUXIÈME SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 3)

ÉNONCÉ

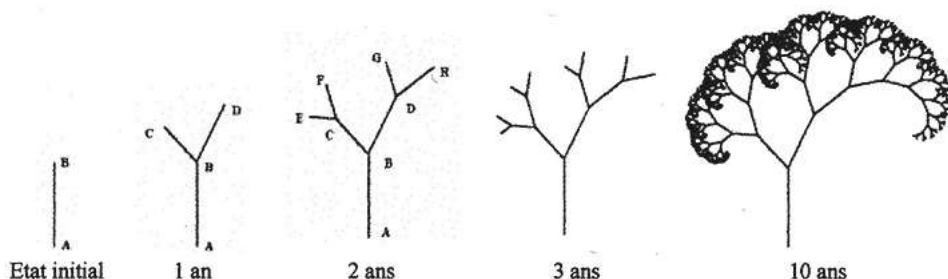
L'unité de longueur est le mètre.

On modélise la croissance d'un arbuste de la façon suivante, illustrée par les dessins ci-dessous.

- L'état initial est représenté par le segment $[AB]$, vertical, de longueur 1, le sol est horizontal en A .
- Un an après, deux "branches" ont poussé, représentées par les segments $[BC]$ et $[BD]$.
- L'année suivante, au bout de chacune des "branches" $[BC]$ et $[BD]$, ont poussé deux "branches" représentées par les segments tels que les triangles BCE , BDG et ABC sont semblables, et que les triangles BCF , BDH et ABD sont semblables.

- Le même processus se répète ensuite chaque année.

Exemple de croissance :



Dans la suite, on suppose que $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD}) = 5\frac{\pi}{6}$, que $CB = 0,7$ et que $BD = 0,75$.

- 1- Faire une figure à l'échelle, en prenant 5 cm pour $[AB]$, représentant l'arbre au bout de 3 ans.
- 2- Avec les notations de l'exemple, donner les hauteurs des points EFGH (extrémités au bout de 2 ans).
- 3- Si on ne tient pas compte de la durée de vie de l'arbuste, sa taille (hauteur) peut-elle dépasser 3,5 ?

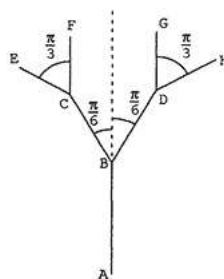
SOLUTION 1⁵

Question n° 1

La forme de l'arbre au bout de deux ans est représentée ci-contre (l'échelle proposée par l'énoncé n'est pas respectée).

Les triangles BCE, BDG et ABC sont semblables, donc $EC = 0,7$ $CB = (0,7)^2 AB = (0,7)^2$.

De même, BCF, BDH et ABD sont semblables donc $FC = 0,75$ $CB = 0,7 \times 0,75$ $AB = 0,7 \times 0,75$



⁵ par l'auteur Jean-Raymond Delahaye professeur agrégé, lycée Alain Borne de Montélimar.

Par ailleurs, les segments $[CF]$, $[AB]$ et $[DG]$ sont parallèles.

Question n° 2

La hauteur de E au-dessus du sol est :

$$1 + 0,7 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + 0,7^2 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 + 0,7 \frac{\sqrt{3}}{2} + 0,7^2 \frac{1}{2} \approx 1,85.$$

La hauteur de F au-dessus du sol est :

$$1 + 0,7 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + 0,7 \times 0,75 = 1 + 0,7 \frac{\sqrt{3}}{2} + 0,7 \times 0,75 \approx 2,13.$$

La hauteur de G au-dessus du sol est :

$$1 + 0,75 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + 0,75 \times 0,7 = 1 + 0,75 \frac{\sqrt{3}}{2} + 0,75 \times 0,7 \approx 2,17.$$

La hauteur de H au-dessus du sol est :

$$1 + 0,75 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + 0,75^2 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 + 0,75 \frac{\sqrt{3}}{2} + 0,75^2 \frac{1}{2} \approx 1,93.$$

Le point le plus haut est donc G.

Question n° 3

A partir de G, on construit les branches $[GI]$, $[IJ]$, $[JL]$ (voir le dessin ci-contre).

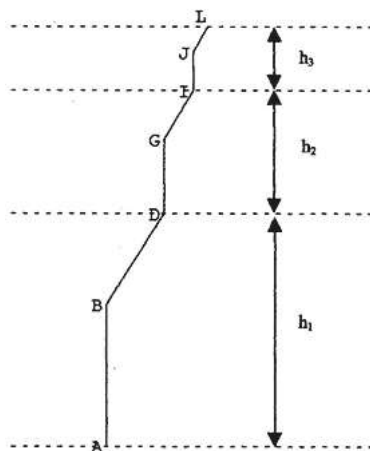
On note h_1, h_2, h_3 les accroissements de la hauteur entre les années 0 et 2, 2 et 4, 4 et 6.

Les triangles ABD, DGI et IJL sont semblables, le rapport de similitude est $0,7 \times 0,75$.

Or $h_1 = 1 + 0,75 \frac{\sqrt{3}}{2}$, donc

$$h_2 = \left(1 + 0,75 \frac{\sqrt{3}}{2}\right) (0,7 \times 0,75)$$

$$\text{et } h_3 = \left(1 + 0,75 \frac{\sqrt{3}}{2}\right) (0,7 \times 0,75)^2.$$



La généralisation est immédiate et, au bout de $2n$ années, la hauteur atteinte sera :

$$H_n = \left(1 + 0,75 \frac{\sqrt{3}}{2}\right) (1 + (0,7 \times 0,75) + (0,7 \times 0,75)^2 + \dots + (0,7 \times 0,75)^{n-1})$$

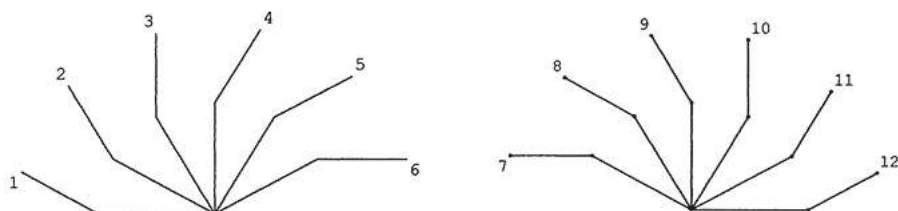
Soit $H_n = \left(1 + 0,75 \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \frac{1 - (0,7 \times 0,75)^n}{1 - (0,7 \times 0,75)}$.

On peut donc affirmer que

$$H_n \leq \left(1 + 0,75 \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \frac{1}{1 - (0,7 \times 0,75)} \approx 3,47.$$

Pour démontrer que la hauteur de l'arbre ne dépasse pas 3,5, il reste à montrer qu'aucune autre branche n'atteint une hauteur supérieure.

Or, entre l'année $2k$ et l'année $2(k+1)$, les nouvelles branches sont dans l'une des positions ci-dessous (on a représenté uniquement celles qui « faisaient gagner de la hauteur »).



Dans chacune des deux figures, les coupâles de branches sont images de l'un d'entre eux dans des rotations d'angles $k \frac{\pi}{6}$.

Il est facile de vérifier que l'accroissement de hauteur est maximal dans le cas n° 4, celui qui a été étudié. On a donc démontré que la hauteur de l'arbre ne dépassera pas 3,5.

COMMENTAIRE

Exercice agréablement original... et bucolique !

ANNEXES

Participation

Inscrits : 161 - Présents : 114

Palmarès

1^{er} prix : Colin RADU - 1^{ère} S Lycée international Europole (Grenoble)

2^e prix : Thomas AOPMAN - 1^{ère} S Lycée Les Trois sources (Bourg lès Valence)

3^e prix : Hervé ELETTO - 1^{ère} S Lycée La Versoir (Thonon les Bains) ;