

GRENOBLE

PREMIER SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 1)

ÉNONCÉ

On s'intéresse à l'angle de tir $\widehat{P_1JP_2}$ d'un joueur J sur un terrain de football. On précise que, pour la plupart des matches internationaux le terrain est un rectangle de longueur et largeur respectives 105 m et 68 m et les poteaux des cages P_1 et P_2 distants de 7,32 m ; valeurs que l'on adoptera pour cet exercice.

1- Quel est l'angle de tir arrondi au dixième de degré pour :

- un gardien de buts placé au milieu de sa cage tirant dans la cage opposée à celle qu'il défend ?
- un joueur placé au point de pénalty (situé à 11 mètres du milieu de la cage visée et équidistant des deux poteaux ?

2- Représenter sur une feuille à l'échelle 1/500 le terrain de football, les cages ainsi que les lignes de niveau où l'angle de tir est constant ; on donnera les valeurs approchés des angles correspondants au dixième de degré. On représentera, en particulier, l'ensemble des points du terrain :

- où l'angle de tir est droit ;
- où il est identique à ceux de la question 1.

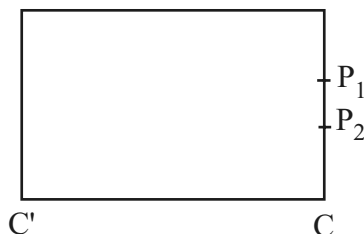
Déterminer la zone du terrain où l'angle de tir est supérieur à l'angle droit.

3- Excepté sur la ligne de sortie (P_1P_2), peut-on placer un joueur pour lequel l'angle de tir serait inférieur à celui obtenu au point le plus éloigné du gardien ?

Si tel est le cas, le placer sur la figure réalisée à la question 2.

4- Le joueur J se déplace sur la ligne de touche (CC') (CC' désigne une longueur du terrain, C étant un point de corner situé sur (P_1P_2) ; voir la figure ci-contre).

On appelle x la longueur CJ ($0 \leq x \leq 105$).



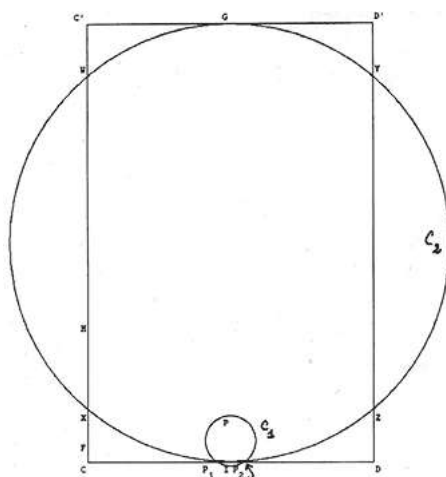
a) Exprimer $\cos \widehat{P_1JP_2}$ en fonction de x , $d_1 = CP_1$ et $d_2 = CP_2$.

(Les calculs seront plus simples au **b**) en gardant d_1 et d_2 plutôt que des valeurs numériques).

b) En déduire la valeur de x pour laquelle l'angle de tir est maximal.

Il n'est pas rare de marquer un but de cette position. Ronaldinho en a marqué un, dans une position proche, lors de la dernière coupe du monde.

Question 2 : Figure avec GEOPLAN



SOLUTION de F. Lo Jacomo

1 - Pour un gardien de but situé en G, à 105 m sur la médiatrice de $[P_1P_2]$, l'angle de tir θ vérifie : $2 \tan \frac{\theta}{2} = \frac{7,32}{105} = 0,0697\dots$, soit $\theta = 4^\circ$.
Si l'on se place au point de pénalty P, à 11 mètres, l'angle de tir φ vérifie : $2 \tan \frac{\varphi}{2} = \frac{7,32}{11} = 0,66545\dots$, soit $\varphi = 36,8^\circ$

2 - La figure est formée d'arcs capables. L'angle de tir est droit sur le demi-cercle de diamètre $[P_1P_2]$, il est identique à celui du gardien de but G sur le cercle circonscrit à GP_1P_2 , il est identique au point de pénalty P sur le cercle circonscrit à PP_1P_2 , et de façon très générale, si M, N, P_1 et P_2 sont sur un même cercle, M et N étant du même côté de (P_1P_2) , les angles inscrits (qui ne sont autres que les angles de tirs) $\widehat{P_1MP_2}$ et

$\widehat{P_1NP_2}$ sont égaux. L'angle de tir est supérieur à l'angle droit à l'intérieur du demi-cercle de diamètre $[P_1P_2]$)

3 - Oui, bien sûr. Les points les plus éloignés du gardien situé en I sont C' et D'. Le cercle C'P₁P₂, qui contient les points dont l'angle de tir est le plus faible des points éloignés, est, pour l'essentiel, extérieur au terrain, mais il traverse le terrain à proximité de C, et donc il existe une zone étroite « entre » C et P₁ ainsi que de l'autre côté de P₂ où l'angle de tir est inférieur à celui de C' ⁴.

$$4 - a) \cos \widehat{CJP_1} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + d_1^2}} \text{ et } \sin \widehat{CJP_1} = \frac{d_1}{\sqrt{x^2 + d_1^2}}$$

$$\text{De même : } \cos \widehat{CJP_2} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + d_2^2}} \text{ et } \sin \widehat{CJP_2} = \frac{d_2}{\sqrt{x^2 + d_2^2}}$$

$$\begin{aligned} \text{On en déduit que } \cos \widehat{P_1JP_2} &= \cos \widehat{CJP_1} \cos \widehat{CJP_2} + \sin \widehat{CJP_1} \sin \widehat{CJP_2} \\ &= \frac{x^2 + d_1d_2}{\sqrt{(x^2 + d_1^2)(x^2 + d_2^2)}} \end{aligned}$$

b) Plutôt que de chercher un extrémum du cosinus ci-dessus il serait déjà plus raisonnable d'utiliser la tangente :

$$\tan \widehat{P_1JP_2} = \frac{(d_2 - d_1)x}{x^2 + d_1d_2} \text{ admet pour dérivée :}$$

$$\frac{(d_2 - d_1)(d_1d_2 - x^2)}{(x^2 + d_1d_2)^2} \text{ qui s'annule pour } x = \sqrt{d_1d_2} = 33,80 \text{ m.}$$

$$\text{Si } d_1d_2 = x^2, \text{ l'angle de tir } \psi \text{ vérifie : } \tan \psi = \frac{d_2 - d_1}{2x}, \text{ donc } \psi = 6,2^\circ.$$

ψ est précisément la moitié de l'angle de tir au point O de la médiatrice de $[P_1P_2]$ situé à la distance x des buts et ce n'est pas un hasard : en effet, les lignes de niveau de la troisième question sont des cercles sur lesquels l'angle de tir est constant, il est supérieur à l'intérieur du cercle et inférieur à l'extérieur. Si en J l'angle est maximum, cela signifie que (CC') ne contient aucun point intérieur au cercle circonscrit à JP_1P_2 , ce qui n'est possible que si (CC') est tangente en J à ce cercle. La puissance de C par rapport à ce cercle vaut alors : $CP_1 \cdot CP_2 = CJ^2$, soit $d_1d_2 = x^2$. O est le centre du cercle, l'angle inscrit $\widehat{P_1JP_2}$ est la moitié de l'angle au centre $\widehat{P_1OP_2}$, qui n'est autre que l'angle de tir de O. Par ailleurs,

⁴N.D.L.R. soit K le second point d'intersection de [CC'] et du cercle C'P₁P₂. Utilisons la puissance de C par rapport au cercle : $CP_1 \times CP_2 = CK \times 105$. D'où $CK \approx \frac{1143}{105}$ soit $CK \approx 10,9$ (en mètres)