

DEUXIÈME SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 3)**ÉNONCÉ**

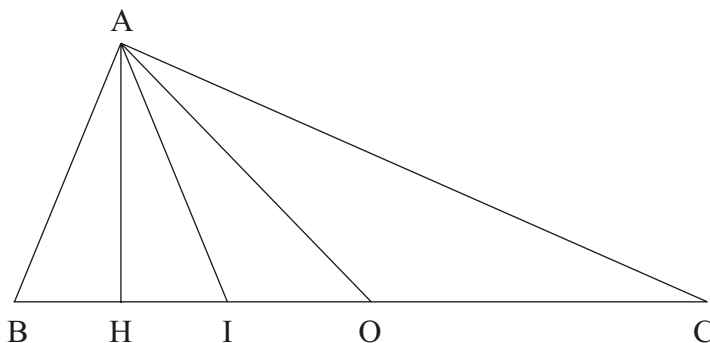
Dans cet exercice, on utilisera sans démonstration le résultat suivant :

Dans tout triangle ABC, $\frac{BC}{\sin \widehat{A}} = \frac{AB}{\sin \widehat{C}} = \frac{AC}{\sin \widehat{B}}$

Dans un triangle ABC, la hauteur, la médiane et la bissectrice relatives au sommet A partagent l'angle $\widehat{BAC}$ en quatre angles de même mesure α .

1°) Exprimer, en fonction de α , les mesures de tous les angles de la figure.

2°) Quelles sont les mesures des angles du triangle ABC ?

**SOLUTION 1**

1°) Par hypothèse, $\widehat{BAH} = \widehat{HAI} = \widehat{IAO} = \widehat{OAC} = \alpha$. (On remarquera au passage que $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$)

(AH) est la hauteur issue de A donc $\widehat{ABH} = \frac{\pi}{2} - \alpha$; c'est aussi la bissectrice de l'angle $\widehat{BAI}$ donc le triangle BAI est isocèle et $\widehat{BIA} = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

On en déduit que $\widehat{OIA} = \frac{\pi}{2} + \alpha$ et que $\widehat{IOA} = \frac{\pi}{2} - 2\alpha$. On obtient enfin de la même manière $\widehat{AOC} = \frac{\pi}{2} + 2\alpha$ et $\widehat{OCA} = \frac{\pi}{2} - 3\alpha$.

2°) Dans les calculs précédents, le fait que (AO) soit une médiane n'a pas été utilisé ; nous appliquons donc la formule donnée en exergue dans

les triangles AOC et AOB, nous obtenons :

$$\frac{OC}{\sin \alpha} = \frac{OA}{\sin \left(\frac{\pi}{2} - 3\alpha \right)} \quad \text{et} \quad \frac{OB}{\sin 3\alpha} = \frac{OA}{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)}$$

Comme $OB = OC$, on voit que α est solution de l'équation $\sin \alpha \cos \alpha = \sin 3\alpha \cos 3\alpha$ qui s'écrit aussi $\sin 2\alpha = \sin 6\alpha$.

Cette dernière équation admet dans l'ensemble des nombres réels deux familles de solutions du type : $6\alpha = 2\alpha + 2k\pi$ ou $6\alpha = \pi - 2\alpha + 2k\pi$ soit $\alpha = k\frac{\pi}{2}$ ou $\alpha = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}$ où k désigne un entier relatif.

Comme $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$, la seule solution acceptable est $\alpha = \frac{\pi}{8}$.

Le triangle ABC est donc rectangle en A, $\widehat{ABC} = \frac{3\pi}{8}$ et $\widehat{BCA} = \frac{\pi}{8}$
--

SOLUTION 2 (de F. LO JACOMO)

Après une solution conforme à la structure de l'énoncé, F. Lo Jacomo ajoute un traitement de la situation d'une rare élégance :

« Mais on peut aussi résoudre ce problème sans utiliser la loi des sinus. Soit M le centre du cercle circonscrit à ABC (désolé pour les notations : O est déjà pris !)(Cf. figure ci-après). Le triangle AMC est isocèle, l'angle au centre $\widehat{AMC}$ vaut deux fois l'angle inscrit $\widehat{ABC}$, donc $\widehat{MAC} = (\pi/2) - \widehat{ABC} = \alpha$, ce qui entraîne que M appartient à (AO). Mais M appartient également à la médiatrice de [BC], qui passe par O, et qui n'est pas la médiane OA (sinon celle-ci serait également hauteur et bissectrice). Donc M = O, ce qui signifie que BC est un diamètre du cercle circonscrit, l'angle $\widehat{A}$ est droit, $\alpha = \pi/8$, $\widehat{ABC} = 3\pi/8$, et $\widehat{BCA} = \pi/8$. »

