

DIJON

PREMIER SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 1)

ÉNONCÉ

Sur la planète « Mathematic », les années ont toujours 365 jours et les mois ne peuvent avoir que 28, 30 ou 31 jours.

1°) Montrer qu'une année « Mathématicienne » comporte toujours douze mois.

2°) Donner toutes les compositions possibles d'une telle année en nombre de mois de 28, 30 et 31 jours.

SOLUTION 1

1°) Supposons qu'il existe une année de 11 mois ; elle ne pourrait comporter qu'au plus $11 \times 31 = 341$ jours, ce qui est exclu. Donc une année mathématicienne comporte au moins 12 mois.

Supposons alors qu'elle en comporte 13. Elle aurait au moins $13 \times 28 = 364$ jours, ce qui nécessite qu'un mois ait plus de 28 jours. Il faut donc au moins 30 jours, mais dans ce cas, l'année comporte 366 jours, ce qui est exclu. Bien entendu, il ne peut pas y avoir plus de 13 mois.

2°) Appelons a le nombre de mois de 28 jours, b le nombre de mois de 30 jours et c le nombre de mois de 31 jours. Le triplet d'entiers naturels (a, b, c) est donc solution du système :

$$\begin{cases} 28a + 30b + 31c = 365 \\ a + b + c = 12 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} a = \frac{c-5}{2} \\ b = \frac{29-3c}{2} \end{cases}$$

d'où les conditions sur c :

$$\begin{cases} c \geq 5 \\ c \leq \frac{29}{3} < 10 \\ c \text{ impair} \end{cases}$$

On peut proposer trois triplets : $(0, 7, 5)$; $(1, 4, 7)$; $(2, 1, 9)$. En les essayant on trouve qu'ils sont tous trois solutions. A noter que $(1, 4, 7)$ est la solution de notre calendrier.

SOLUTION 2 (d'André GUILLEMOT)

$365/31 = 11,7\dots$ donc on ne peut pas avoir plus de 11 mois de 31 jours dans une année « Mathématicienne »

$365/30 = 12,1\dots$ donc on ne peut pas avoir plus de 12 mois de 30 jours dans une année « Mathématicienne »

$365/28 = 13,03\dots$ donc on ne peut avoir plus de 13 mois de 28 jours dans une année « Mathématicienne »

Soit A , B et C le nombre de mois de 28, 30 et 31 jours dans une année « Mathématicienne ».

Nous avons donc à résoudre l'équation $28A + 30B + 31C = 365$, avec A , B et C des entiers tels que $0 \leq A \leq 13$, $0 \leq B \leq 12$ et $0 \leq C \leq 11$.

Utilisons le programme suivant pour trouver toutes les solutions :

PROGRAM: DIJON	Pr9mDIJON	
:For(A,0,13)		{0 7 5}
:For(B,0,12)		{1 4 7}
:For(C,0,11)		{2 1 9}
:28A+30B+31C→D		Done
:If D=365	■	
:Disp (A,B,C)		
:End:End:End■		

Le programme nous fournit trois solutions qui donnent toutes des années de 12 mois.

- Première solution : 7 mois de 30 jours et 5 mois de 31.
- Deuxième solution : 1 mois de 28 jours, 4 mois de 30 et 7 mois de 31.
- Troisième solution : 2 mois de 28 jours, 1 de 30 et 9 de 31.

COMMENTAIRE (rédaction de la brochure)

Joli sujet, court et agréable.