

possible. Il existe donc au plus cinq solides réguliers dans l'espace de dimension 3.

COMMENTAIRES (inspirés de F. LO JACOMO)

Le problème postule implicitement que l'on sait que, dans un polyèdre régulier, les sommets voisins d'un sommet donné sont dans un même plan.

Yves, pour le parasol, postule-t-il peut-être un peu vite cette « évidence » ? D'autre part, au A, la différence entre les questions 1 et 2 laisse perplexe : « proposer une explication » se fait-il sans justification du raisonnement ? D'ailleurs les corrigés ne s'encombrent pas de cette distinction.

La façon dont le problème est présenté ne laisse pas indifférent : parfois jugée trop prolixe, elle est aussi parfois jugée fort intéressante pour redonner vie à une recherche classique.

DEUXIÈME SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 4)

ÉNONCÉ

Après de multiples péripéties, une archéologue a été abandonnée par un faux guide, évanouie et dévalisée à l'intérieur d'une pyramide. A son réveil, elle se retrouve seule, dans une immense pièce entourée de quatre-cents portes fermées, numérotées de 1 à 400. Elle découvre près d'elle un papyrus indiquant qu'une seule porte permet d'en sortir, les autres donnant sur des couloirs piégés. Ce papyrus donne aussi le moyen de trouver la bonne porte.

Sachant qu' « Actionner une porte » c'est « la fermer si elle est ouverte, l'ouvrir si elle est fermée », suivre les instructions suivantes :

Etape 1 : ouvrir toutes les portes ;

Etape 2 : actionner les portes dont les numéros sont multiples de 2. Ici, cela revient à les fermer ;

Etape 3 : actionner celles dont le numéro est un multiple de 3 ;

Etape 4 : actionner celles dont le numéro est un multiple de 4 ;

Etape 5 : actionner celles dont le numéro est un multiple de 5 ;

et ainsi de suite...

A la fin de toutes les étapes, sortir par la dix-septième porte ouverte.

A la fin de toutes les étapes

- 1) Préciser la position (ouverte ou fermée) de chacune des 5 premières portes.
- 2) Que dire des positions des portes 24, 25, 27, 36 et 40 ?
- 3) Quelle conjecture peut-on faire sur le numéro des portes qui sont ouvertes ?
- 4) Quel est le numéro de la porte qui lui a permis de sortir ?
- 5) Comment l'archéologue a-t-elle fait pour le trouver ?

SOLUTION

1) Remarquons d'abord que les portes étant toutes ouvertes à l'étape 1, seules celles qui ont été ensuite actionnées un nombre pair de fois sont ouvertes à la fin de toutes les étapes.

La porte n° 1 reste ouverte.

La porte n° 2 est fermée (car actionnée une seule fois comme multiple de 2).

La porte n° 3 est fermée (car actionnée une seule fois comme multiple de 3).

La porte n° 4 est ouverte (car actionnée deux fois comme multiple de 2 et de 4).

La porte n° 5 est fermée (car actionnée une seule fois comme multiple de 5).

2) Les diviseurs de 24 différents de 1 sont : 2, 3, 4, 6, 8, 12 et 24.

La porte n° 24 est fermée, car actionnée 7 fois, donc un nombre impair de fois.

Les diviseurs de 25 différents de 1 sont 5 et 25.

La **porte n° 25** est donc **ouverte** car actionnée deux fois.

Les diviseurs de 27 différents de 1 sont 3, 9 et 27.

La porte n° 27 est donc fermée car actionnée un nombre impair de fois.

Les diviseurs de 36 différents de 1 sont 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 et 36.

La **porte n° 36** est **ouverte** car actionnée huit fois, donc un nombre pair de fois.

Les diviseurs de 40 différents de 1 sont 2, 4, 5, 8, 10, 20 et 40.

La porte n° 40 est fermée car actionnée sept fois, donc un nombre impair

de fois.

3) De l'étude précédente, on peut conjecturer que seules les portes dont le numéro est un carré d'un entier sont ouvertes.

4) La porte qui a permis de sortir étant la dix-septième ouverte, ce serait donc celle qui porte le numéro 289 (car $17^2 = 289$).

5) *Rédaction pour un élève de Première* : Soit p un diviseur de l'entier naturel n alors $n = p \times q$ où q est aussi un diviseur de n .

Si n n'est pas un carré, alors p et q sont toujours distincts et on peut associer deux par deux les diviseurs de n qui sont donc en nombre pair.

Si n est un carré, alors l'entier m qui est sa racine carrée divise n et est associé avec lui-même ($n = m^2 = m \times m$). Par conséquent, seuls les carrés des entiers ont un nombre impair de diviseurs.

Les carrés des entiers ont donc un nombre pair de diviseurs différents de 1. Les portes dont le numéro est un carré d'entier sont les seules à être actionnées un nombre pair de fois. Elles sont donc ouvertes à la fin de toutes les étapes. Ce qui explique que l'archéologue se dirige sans hésitation vers la porte n° 289.

COMMENTAIRE

En entamant la question 3 on sait que, parmi les dix portes examinées dans les questions 1 et 2, seules sont ouvertes les portes 1, 4, 25, 36.

Est-ce suffisant pour conjecturer ?

Sans doute est-il plus sage d'examiner quelques autres portes ! A moins que l'on ne le démontre dès le n° 3.

L'archéologue aura bien fait de s'attaquer au problème de la parité du nombre de diviseurs avant de se fier à une conjecture...

Le problème est fort intéressant : il valorise à souhait une propriété caractéristique, remarquable et peu signalée, des carrés...

ANNEXE**PARTICIPATION ET PRIX**

Classe	Inscrits			Présents			Classés		
	F	G	Total	F	G	Total	F	G	Total
1S	184	333	517	103	184	287	8	23	31

Voici les cinq premiers

1 : Sophie GUILLON (lycée Mistral, Fresnes)

2 : Charles CORINTIN (lycée M. Berthelot, St Maur)

3 : Alexis FLUTEAUX (Lycée Ste Céline, La Ferté-s-Jouarre)

4 : Terry PARCINSKI (lycée Bronte, Lognes)

5 : Héloïse SUN (lycée F. Couperin, Fontainebleau).

REMISE DES PRIX

A noter l'intervention d'un académicien, Yves MEYER, professeur émérite à l'E.N.S., à propos du traitement d'images.