

CRETEIL

PREMIER SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 2)

ÉNONCÉ

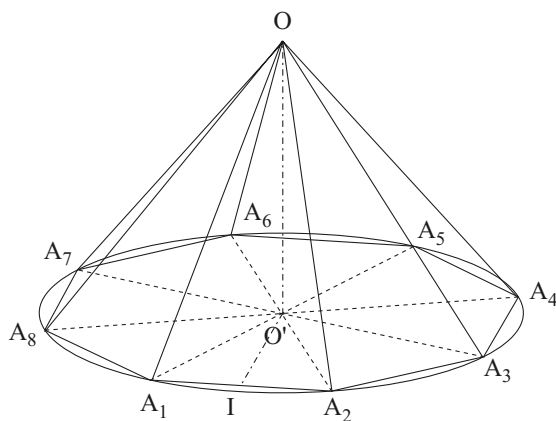
Le parasol

A une terrasse de café, sous un parasol moderne aux tiges en bois bien droites, par un bel après-midi ensoleillé, Yves et quelques-uns de ses camarades de classe parlent du devoir à la maison qu'ils doivent rendre prochainement. Ce devoir de mathématiques a pour objectif de trouver le nombre de solides réguliers dans l'espace.

A) Yves réalise que la première question du devoir revient à montrer que la somme des angles compris entre deux tiges consécutives du parasol est inférieure à 2π radians.

En effet, puisque les tiges sont droites, toutes de même longueur, que l'angle formé par deux tiges consécutives est toujours le même et que les extrémités des tiges toutes situées dans un même plan perpendiculaire au piquet du parasol forment un polygone régulier, Yves explique à ses camarades qu'il est évident que la somme des angles compris entre deux tiges consécutives du parasol est inférieure à 2π radians. Ils lui demandent pourquoi.

Ses réponses n'étant pas suffisamment convaincantes, il compte alors le nombre de tiges du parasol et fait le dessin ci-dessous.



Il note O le sommet du parasol, $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8$ les extré-

mités des tiges, O' le centre de l'octogone régulier $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ et I le milieu du segment $[A_1A_2]$. Puis présente son raisonnement :

« Si nous montrons que les triangles A_1IO' et A_1IO sont rectangles en I et que l'angle $\widehat{A_1OA_2}$ est inférieur à l'angle $\widehat{A_1O'A_2}$, nous en déduirons facilement que la somme des angles compris entre deux tiges consécutives du parasol est inférieure à 2π radians. »

1- Proposer une explication qui pourrait convaincre les camarades d'Yves.

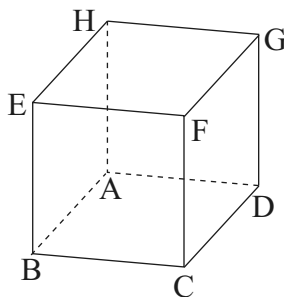
Justifier son raisonnement.

B) Puis Yves revient au problème et développe son idée.

Un solide de l'espace est régulier si toutes ses faces sont des polygones réguliers identiques.

Par exemple un cube est un solide régulier à faces carrées.

(1) Si un polygone régulier a n sommets ($n \geq 3$), chaque angle au sommet mesure $\pi - \frac{2\pi}{n}$ radians.



On sait que l'angle formé par des arêtes consécutives est égal à chacun des angles au sommet des polygones réguliers constituant les faces du solide et que les extrémités des arêtes issues d'un même sommet sont, comme celles des tiges du parasol, toutes dans un même plan et forment un polygone régulier. En notant p le nombre d'arêtes issues d'un des sommets d'un solide régulier dont les faces ont n côtés (par exemple pour le cube, $p = 3$ et $n = 4$), on a alors $p \geq 3$ et on peut montrer que

(2) $p \left(1 - \frac{2}{n}\right) < 2$ puis que $\frac{1}{p} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2}$.

(3) Alors on en déduira facilement le nombre maximum de solides réguliers que l'on pourrait avoir dans l'espace.

(4) et, en fonction des valeurs trouvées pour n et p , on pourra reconnaître quelques-uns de ces solides.

Démontrer les affirmations (1), (2), (3) et (4).

SOLUTION 1

A)a) Le triangle $A_1O'A_2$ est isocèle en O' car $O'A_1$ et $O'A_2$ sont des rayons du cercle, I est le milieu de $[A_1A_2]$, donc $O'I$ est la hauteur issue de O' . Il en résulte que le triangle A_1IO' est rectangle en I . De même le triangle A_1OA_2 est isocèle en O car les tiges sont de longueurs égales; OI est donc la hauteur issue de O . Il en résulte que A_1IO est rectangle en I .

b) $\sin \widehat{A_1O'I} = \frac{A_1I}{O'A_1}$ et $\sin \widehat{A_1OI} = \frac{A_1I}{OA_1}$. $O'A_1 < OA_1$ car la droite (OO') étant orthogonale au plan de l'octogone, $[OA_1]$ est l'hypoténuse du triangle $OO'A_1$ rectangle en O' . Nous en déduisons $\frac{A_1I}{O'A_1} > \frac{A_1I}{OA_1}$.

La fonction sinus étant strictement croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\widehat{A_1O'I} > \widehat{A_1OI}$ étant dans cet intervalle, car ce sont des angles aigus dans un triangle rectangle, nous obtenons $\widehat{A_1O'I} > \widehat{A_1OI}$.

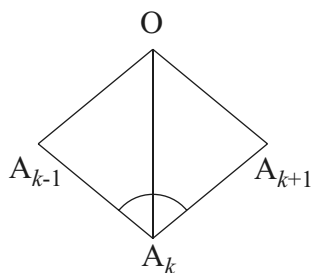
Les triangles $A_1O'A_2$ et A_1OA_2 étant respectivement isocèles en O et O' avec I milieu de $[A_1A_2]$, (OI) et $(O'I)$ sont les bissectrices respectives des

angles $\widehat{A_1OA_2}$ et $\widehat{A_1O'A_2}$, d'où $\widehat{A_1OI} = \frac{\widehat{A_1OA_2}}{2}$ et $\widehat{A_1O'I} = \frac{\widehat{A_1O'A_2}}{2}$.
 $\widehat{A_1O'I} > \widehat{A_1OI}$ donc $\widehat{A_1OA_2} < \widehat{A_1O'A_2}$.

c) Les huit angles au centre de l'octogone régulier sont tous égaux à $\widehat{A_1O'A_2}$ et leur somme vaut 2π . Les huit angles de sommet O formés par deux tiges consécutives du parasol sont tous égaux à $\widehat{A_1OA_2}$. Leur somme $8 \widehat{A_1OA_2}$ est donc inférieure à $8 \widehat{A_1O'A_2}$, il en résulte que $8 \widehat{A_1OA_2} < 2\pi$.

B) Désignons par O le centre d'un polygone régulier à n sommets. Les triangles $A_{k-1}OA_k$ et A_kOA_{k+1} sont isocèles en O avec $\widehat{A_{k-1}OA_k} = \widehat{A_kOA_{k+1}} = \frac{2\pi}{n}$, il en résulte que $\widehat{A_{k-1}A_kO} = \widehat{A_kOA_{k+1}} = \frac{1}{2} \left(\pi - \frac{2\pi}{n} \right)$, d'où $\widehat{A_{k-1}A_kA_{k+1}} = 2\widehat{A_{k-1}A_kO} = \pi - \frac{2\pi}{n}$. Ceci étant valable pour chacun des sommets du polygone régulier.

b) Reprenons la démonstration faite en A) avec le parasol et l'octogone régulier, dans le cas où il y aurait p tiges et où les extrémités forment un polygone régulier à p sommets. Les angles au sommet dont sont issues les arêtes ont pour mesure $\pi - \frac{2\pi}{n}$ et sont au nombre de p . Alors



$p \left(\pi - \frac{2\pi}{n} \right) < 2\pi$ soit $p \left(1 - \frac{2}{n} \right) < 2$. Nous en déduisons $1 - \frac{2}{n} < \frac{2}{p}$ soit $\frac{2}{p} + \frac{2}{n} > 1$ d'où $\frac{1}{p} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2}$.

Si $n > 3$ et $p > 3$, alors $\frac{1}{p} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

Donc n et p ne peuvent pas être à la fois supérieurs à 3.

- $n = 3$ et $p = 3$, $\frac{2}{3} > \frac{1}{2}$, nous obtenons le tétraèdre régulier ;
- $n = 3$ et $p = 4$, $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 2 \times \frac{1}{4}$ soit $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{2}$, nous obtenons l'octaèdre régulier ;
- $n = 3$ et $p = 5$, $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}$ et nous obtenons l'icosaèdre ;
- si $p \geq 6$, $\frac{1}{3} + \frac{1}{p} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ soit $\frac{1}{3} + \frac{1}{p} \leq \frac{1}{2}$. Avec $n = 3$, on ne peut donc avoir que $p = 3$ ou $p = 4$ ou $p = 5$.

Dans $\frac{1}{p} + \frac{1}{n}$, p et n jouent des rôles symétriques. Il y a donc encore comme possibilités :

- $n = 4$ et $p = 3$; nous obtenons le cube ;
- $n = 5$ et $p = 3$; nous obtenons le dodécaèdre régulier.

SOLUTION 2 (de F. LO JACOMO)

(Mêmes idées que pour la solution 1, mais avec des présentations différentes).

1 et 2 - Si l'on admet « que les extrémités des tiges toutes situées dans un même plan perpendiculaire au piquet du parasol forment un polygone régulier » de centre O' , alors les trois points O , O' et I sont équidis-

tants de A_1 et A_2 . L'ensemble des points équidistants de A_1 et A_2 est le plan médiateur de $[A_1A_2]$, plan perpendiculaire à (A_1A_2) , ce qui signifie que toute droite de ce plan (notamment OI et $O'I$) est perpendiculaire à (A_1A_2) . Le plan du polygone, perpendiculaire au piquet, étant supposé passer par O' , centre du polygone, OI est l'hypoténuse du triangle rectangle $OO'I$, donc $OI > O'I$. Dans les triangles rectangles OIA_1 et $O'IA_1$, $\tan \widehat{A_1OI} = \frac{A_1I}{OI} < \frac{A_1I}{O'I} = \tan \widehat{A_1O'I}$, donc $\widehat{A_1OI} < \widehat{A_1O'I}$: les $\widehat{A_iOA_{i+1}}$ sont tous égaux à $2\widehat{A_1OI}$, leur somme est donc inférieure à la somme des $\widehat{A_iO'A_{i+1}}$ qui vaut 2π .

B - Si un polygone convexe a n sommets, soit O un point quelconque intérieur au polygone, que l'on relie à chacun des sommets du polygone. On obtient n triangles, la somme des angles de chacun de ces triangles vaut π , donc la somme des angles de ces n triangles vaut $n\pi$. Or cette somme est égale à la somme des angles du polygone plus la somme des angles en O , laquelle vaut manifestement 2π . Il en résulte que la somme des angles du polygone vaut $(n-2)\pi$. Si en outre le polygone est régulier, ces n angles sont égaux, et ils sont tous égaux à : $\frac{(n-2)\pi}{n} = \left(1 - \frac{2}{n}\right)\pi$.

Dire qu'en tout sommet du polyèdre, les p angles de mesure $\left(1 - \frac{2}{n}\right)\pi$ ont une somme inférieure à 2π équivaut à dire que $\left(1 - \frac{2}{n}\right) < 2$, soit $1 - \frac{2}{n} < \frac{2}{p}$, ou encore $\frac{1}{n} + \frac{1}{p} > \frac{1}{2}$.

Si $n = 3$ (faces triangulaires), on doit avoir $\frac{1}{p} > \frac{1}{6}$, donc $p < 6$, ce qui fournit trois polyèdres : pour $p = 3$, le tétraèdre, pour $p = 4$, l'octaèdre et pour $p = 5$, l'icosaèdre.

Si $n = 4$ (faces carrées), on doit avoir $\frac{1}{p} > \frac{1}{4}$, donc $p < 4$: une seule possibilité, le cube ($p = 3$).

Si $n = 5$ (faces pentagonales), on doit avoir $\frac{1}{p} > \frac{3}{10}$: une dernière possibilité, le dodécaèdre ($p = 3$).

Par contre, pour $n \geq 6$, on devrait avoir $\frac{1}{p} < \frac{1}{3}$, $p < 3$ ce qui n'est pas