

- un triangle ABC susceptible de lui donner naissance, cela sans savoir si un tel triangle existe ;
- ou bien (2) on connaît le triangle PQR construit à partir d'un triangle ABC effacé et il s'agit alors, sachant qu'il y a une solution, au moins une, de retrouver le triangle ABC ;

Dans le cas (2), comme il y a, à coup sûr, une solution (au moins une) on est sûr que, dès que la condition nécessaire est réalisée, elle est suffisante. Point n'est besoin de « synthèse ».

Par contre, dans le cas (1), la synthèse s'impose. Le corrigé fourni ci-dessus se place donc dans ce cas. Peut-être l'énoncé devrait-il s'y situer plus nettement...

Evidemment la formulation (2) permet une dévolution plus générale du problème, plus tôt et à plus d'élèves...

DEUXIÈME SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 2)

ÉNONCÉ

Soit $A_1A_2\dots A_n$ un polygone convexe à n côtés. Soit $B_1B_2\dots B_n$ le polygone dont les sommets sont les milieux des côtés du polygone $A_1A_2\dots A_n$. On cherche à étudier le rapport de l'aire de $A_1A_2\dots A_n$ à l'aire de $B_1B_2\dots B_n$.

1) Etude du cas des polygones réguliers :

Démontrer que si $A_1A_2\dots A_n$ est un polygone régulier, alors $B_1B_2\dots B_n$ est un polygone régulier et calculer le rapport des aires de $A_1A_2\dots A_n$ et de $B_1B_2\dots B_n$ en fonction de n .

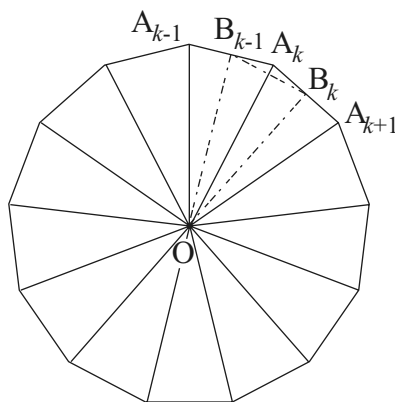
2) Etude de polygones convexes quelconques :

- a) Etude du cas $n = 3$. Démontrer que le rapport des aires de $A_1A_2A_3$ et $B_1B_2B_3$ est constant et calculer ce rapport.
- b) Etude du cas $n = 4$. Démontrer que le rapport des aires $A_1A_2A_3A_4$ et $B_1B_2B_3B_4$ est constant et calculer ce rapport.
- c) Ce rapport est-il constant pour tous les polygones convexes à 5 côtés ?

SOLUTION 1

1- Soit $A_1A_2\dots A_n$ un polygone régulier : les points sont sur un même cercle de centre O ; chaque côté intercepte un angle au centre de mesure

$\frac{2\pi}{n}$. Les triangles OA_kA_{k+1} sont isocèles et isométriques. Ils ont des médiatrices issues de O de même longueur, donc les milieux des côtés sont sur un même cercle de centre O . Considérons les milieux B_{k-1} et B_k de deux côtés consécutifs : (OA_k) et (OB_{k-1}) étant aussi des bissectrices des angles au centre, on en déduit que l'angle $\widehat{B_{k-1}OB_k}$ a pour mesure $\frac{2\pi}{n}$. Le polygone $B_1B_2 \dots B_n$ est donc un polygone régulier de même centre.

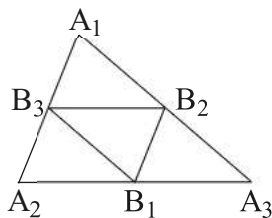


Comparons les aires des triangles OA_kA_{k-1} et OB_kB_{k-1} en notant R le rayon du cercle circonscrit à $A_1A_2A_n$.

L'aire de OA_kA_{k-1} est $a = \frac{1}{2} OA_k \cdot OA_{k-1} \cdot \sin \widehat{A_kOA_{k-1}} = \frac{1}{2} R^2 \sin \frac{2\pi}{n}$

Dans le triangle rectangle OA_kB_k , $\cos \frac{\pi}{n} = \frac{OB_k}{R}$ donc $OB_k = R \cdot \cos \frac{\pi}{n}$
 et l'aire de OB_kB_{k-1} est donc $b = \frac{1}{2} OB_k^2 \cdot \sin \frac{2\pi}{n} = \frac{1}{2} R^2 \cos^2 \frac{\pi}{n} \cdot \sin \frac{2\pi}{n}$.

Donc $\frac{a}{b} = \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{n}} = 1 + \tan^2 \frac{\pi}{n}$.



2-a) Le triangle $A_1A_2A_3$ est un agrandissement de $B_1B_2B_3$ dans le rapport 2. Le rapport des aires est donc $2^2 = 4$.

b) On montre facilement, grâce au théorème des milieux, que le qua-

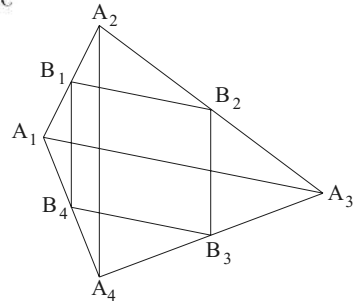
drilatère $B_1B_2B_3B_4$ est un parallélogramme. L'aire a de $A_2B_1B_2$ est le quart de celle de $A_1A_2A_3$. De même l'aire b de $A_4B_3B_4$ est le quart de celle de $A_1A_3A_4$. Ainsi $a + b$ est le quart de l'aire totale du quadrilatère. De même la somme des aires c et d des triangles $A_1B_1B_4$ et $A_3B_3B_2$ est égale au quart de l'aire du quadrilatère. Donc

$$a + b + c + d = \frac{1}{2} \text{ aire } (A_1A_2A_3A_4).$$

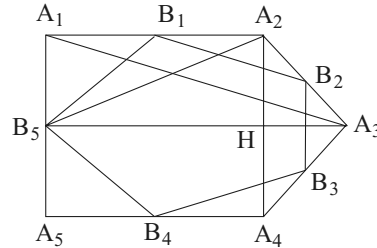
Donc l'aire de $B_1B_2B_3B_4$ est

$$\text{aire } (A_1A_2A_3A_4) - \frac{1}{2} \text{ aire } (A_1A_2A_3A_4) = \frac{1}{2} \text{ aire } (A_1A_2A_3A_4)$$

$$\text{Donc } \frac{\text{aire}(A_1A_2A_3A_4)}{\text{aire}(B_1B_2B_3B_4)} = 2$$



c) Considérons le quadrilatère convexe à 5 côtés ci-contre où $A_1A_2A_3A_4A_5$ est un rectangle, avec $A_1A_5 = 2x$ et $A_1A_2 = 2y$, et le triangle $A_2A_3A_4$ est tel que H soit le milieu de $[A_2A_4]$ et $HA_2 = HA_3 = x$.



$$\text{aire } (A_1B_1B_5) = \frac{xy}{2}$$

$$\text{aire } (A_2B_1B_2) = \frac{\text{aire } (A_1A_2A_3)}{4} = \frac{2xy}{8} = \frac{xy}{4}$$

$$\text{aire } (A_3B_2B_3) = \frac{\text{aire } (A_2A_3A_4)}{4} = \frac{2x \times x}{8} = \frac{x^2}{4}$$

$$\text{aire } (B_1B_2B_3B_4B_5) = \text{aire } (A_1A_2A_3A_4A_5) - \left(2 \times \frac{xy}{2} + 2 \times \frac{xy}{4} + \frac{x^2}{4} \right).$$

Or $A_1A_2A_3A_4A_5$ est formé de deux trapèzes symétriques, donc son aire est aire de $A_1A_2A_3A_4B_5 = y(4y + x)/2$

aire de $A_1A_2A_3A_4A_5$ (double de la précédente) = $x(4y + x)$

$$\begin{aligned} \text{aire de } B_1B_2B_3B_4B_5 &= x(4y + x) - (xy + xy/2 + x^2/4) \\ &= x(3x + 10y)/4 \end{aligned}$$

$$\frac{\text{aire } (A_1A_2A_3A_4A_5)}{\text{aire } (B_1B_2B_3B_4B_5)} = \frac{4(4y + x)}{3x + 10y}$$

.

Il est clair que le quotient obtenu n'est pas constant.

VARIANTES (par Henri BAREIL)

1- (Après avoir établi que $\widehat{B_k O A_k} = \frac{\pi}{n}$)

La configuration $OA_k B_k$ où $(B_k B_{k-1})$ coupe (OA_k) en I se répète $2n$ fois. Or $(B_{k-1} B_k) \perp (OA_k)$ (en raison de symétrie par exemple). Donc le rapport des aires des triangles rectangles semblables $OA_k B_k$ et $OB_k I$ est le carré du rapport de leurs hypoténuses. Or celui-ci est $\cos \frac{\pi}{n}$.

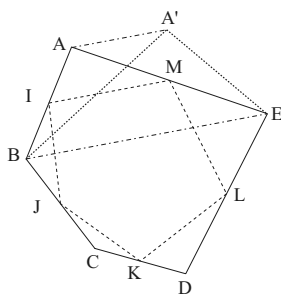
Et ce rapport est celui des aires des deux polygones...

2- a) On peut vérifier que le cas particulier du triangle équilatéral donne bien un résultat conforme au 1°).

De même pour le cas du carré, au b).

b) Soit O l'intersection des diagonales du quadrilatère convexe $A_1 A_2 A_3 A_4$. Ce quadrilatère étant convexe est composé de 4 configurations telles que $OA_1 A_2$; avec $(B_1 B_4)$ qui coupe $[OA_1]$ en son milieu I et $(B_1 B_2)$ qui coupe $[OA_2]$ en son milieu J. On peut démontrer, de plusieurs façons, que $\text{aire}(IB_1 JO) = \frac{1}{2} \text{aire}(OA_1 A_2)$. d'où...

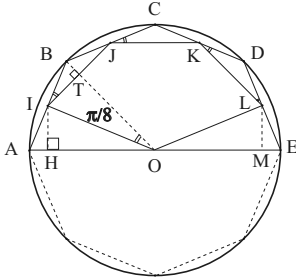
c) Autre contre-exemple, avec ABCDE tel que (CD) non parallèle à (BE)



Déplaçons A en A' parallèlement à (BE)...et notons les aires par des parenthèses. L'aire a de ABCDE ne varie pas. Qu'advient-il de celle de IJKLM? Selon la méthode du corrigé, elle est égale à :

$a - [(AIM) + (EML) + (DKL) + (CJK) + (BIJ)]$. Seules en cette expression, varie $(BIJ) + (ELM)$ soit $\frac{1}{4}[(BAC) + (EAD)]$, c'est-à-dire encore $\frac{1}{4}[a - (ACD)]$.

Or l'aire (ACD) varie puisque A ne se déplace pas parallèlement à (CD). L'aire de ABCDE étant constante et celle de IJKLM variable, leur rapport ne saurait être constant...

Autre contre-exemple, « branché » sur la question 1

Soit le « demi-octogone » $ABCDE$, avec $[AD]$ diamètre du cercle circonscrit, A, B, C, D, E étant les sommets successifs d'un octogone régulier.

Alors :

$$\begin{aligned} (OIJKL) &= 3 (OAB) \times \left(\frac{OI}{R} \right)^2 \\ &= 3 (OAB) \times \cos^2 \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

$$\text{et } \frac{(OIJKL)}{ABCDE} = 3 (OAB) \times \frac{\cos^2 \frac{\pi}{8}}{4 (OAB)} = \frac{3}{4} \cos^2 \frac{\pi}{8}.$$

Or le 1° , avec un pentagone régulier, donne un rapport égal à $\cos^2 \frac{\pi}{8} \dots$ Donc...

SOLUTION 2 (par F. LO JACOMO)

1- Si l'on définit un polygone régulier comme un ensemble de n sommets globalement invariant par une rotation de $\frac{2\pi}{n}$, il est clair qu'une telle rotation conserve également les milieux des côtés, donc $B_1B_2 \dots B_n$ est lui aussi un polygone régulier. Il est également clair que tous les triangles de sommets, l'un des A_i et les deux B_j voisins sont isocèles et égaux et que tous les angles du polygone $B_1B_2 \dots B_n$ sont égaux. Si R est le rayon du cercle circonscrit à $A_1A_2 \dots A_n$, le cercle inscrit dans $A_1A_2 \dots A_n$ est circonscrit à $B_1B_2 \dots B_n$, il a pour rayon $R \times \cos \frac{\pi}{n}$, ce qui prouve que le rapport des aires tel que défini dans l'énoncé vaut $\frac{1}{\cos^2(\pi/n)}$: une similitude d'angle $\frac{\pi}{n}$ et de rapport $\cos \frac{\pi}{n}$ transforme le polygone $A_1A_2 \dots A_n$ en $B_1B_2 \dots B_n$.

2-a) D'après la première question, si ce rapport est constant, il doit être égal à $\frac{1}{\cos^2(\pi/3)} = 4$. Or il est classique que les segments $[B_1B_2]$, $[B_2B_3]$ et $[B_3B_1]$ partagent le triangle $A_1A_2A_3$ en quatre triangles égaux, l'aire du triangle $B_1B_2B_3$ est donc bien le quart de l'aire du triangle $A_1A_2A_3$.

b) Pour la même raison, lorsque $n = 4$, si le rapport est constant il doit

être égal à $\frac{1}{\cos^2(\pi/2)}$. Or si B_i est le milieu de $[A_i A_{i+1}]$ (B_4 le milieu de $[A_4 A_1]$), que ce soit en utilisant la question précédente ou en invoquant l'homothétie de rapport $\frac{1}{2}$ qui transforme A_4 en B_4 et A_2 en B_1 , le triangle $B_4 A_1 B_1$ a pour aire le quart de l'aire de $A_4 A_1 A_2$. De même, $(B_2 A_3 B_3) = \frac{1}{4} \times (A_2 A_3 A_4)$,

donc la somme $(B_4 A_1 B_1) + (B_2 A_3 B_3) = \frac{1}{4} \times (A_1 A_2 A_3 A_4)$

et, pour la même raison, $(B_1 A_2 B_2) + (B_3 A_4 B_4) = \frac{1}{4} \times (A_1 A_2 A_3 A_4)$.

On en déduit que l'aire de $B_1 B_2 B_3 B_4$ qui n'est autre que $A_1 A_2 A_3 A_4$ privé des quatre triangles $B_{i-1} A_i B_i$ est toujours égale à la moitié de l'aire de $A_1 A_2 A_3 A_4$.

c) Si ce rapport était constant lorsque $n = 5$, on aurait, comme précédemment, en appelant (A) le pentagone $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$ et (B) le pentagone $B_1 B_2 B_3 B_4 B_5$, $\text{aire}(B) = \cos^2 \frac{\pi}{5} \times \text{aire}(A)$. Or, déformons le pentagone (A) en plaçant A_3 infiniment près de A_2 et A_4 infiniment près de A_5 , B_2 sera lui aussi infiniment près de A_2 , B_3 du milieu de $[A_2 A_5]$ et B_4 de A_5 . Le pentagone (A) sera infiniment voisin d'un triangle $A_1 A_2 A_5$, et le pentagone (B), infiniment voisin d'un trapèze $B_1 A_2 A_5 B_5$ dont l'aire vaut manifestement $\frac{3}{4} \times \text{aire}(A) = \cos^2 5 \frac{\pi}{6} \times \text{aire}(A)$. Si le rapport des aires était constant pour tout pentagone, il resterait égal à cette constante, même dans le cas limite, ce qui n'est manifestement pas vérifié.

On peut également étudier un pentagone qui ne soit pas cas limite, par exemple celui du c) de la solution 1.

COMMENTAIRE (rédaction de la brochure)

C'est un exercice de bon aloi, facile au départ, logiquement moins à la dernière question, au c) du 2. Et ce c) a le mérite de souligner la vertu démonstrative éventuelle d'un contre-exemple. Ici, il n'est pas très aisé d'en trouver qui soient simples : mais la recherche, qui doit diminuer le nombre de variables, est fort instructive... Les trois contre-exemples proposés ne sont évidemment pas les seuls possibles... Aux imaginations de se déployer.

Il va de soi que l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique capable d'évaluer des aires change la nature du problème.