

CORSE

PREMIER SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 1)

ÉNONCÉ

Soit ABC un triangle.

On définit les trois points P, Q et R (figure 1) par :

$$\overrightarrow{AP} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AB} \quad ; \quad \overrightarrow{BQ} = \frac{5}{2}\overrightarrow{BC} \quad ; \quad \overrightarrow{CR} = \frac{5}{2}\overrightarrow{CA}$$

Reconstruire le triangle ABC, en partant d'un triangle PQR donné, comme dans la figure 2.

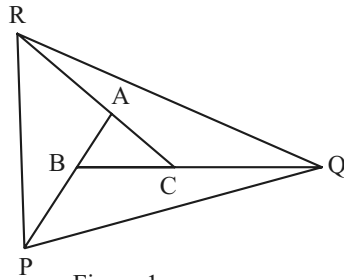


Figure 1

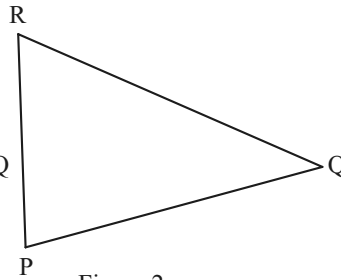
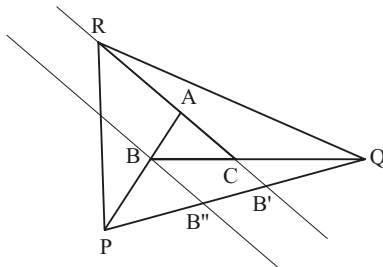


Figure 2

SOLUTION

1. Analyse de la figure



Soit B' l'intersection de (PQ) avec (AC) et B'' l'intersection de (PQ) avec la parallèle à (AC) passant par B. Le théorème de Thalès appliqué à BB''Q permet d'affirmer que

$$\overrightarrow{B''Q} = \frac{5}{2}\overrightarrow{B'B'}.$$

Le même théorème appliqué à PAB' nous donne :

$$\overrightarrow{B'P} = \frac{5}{2}\overrightarrow{B'B''}.$$

Donc, d'une part $\overrightarrow{B''Q} = -\overrightarrow{B'P}$

$$\text{et } \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB'} + \overrightarrow{B'B''} + \overrightarrow{B''Q} = -\overrightarrow{B'P} + \frac{2}{5}\overrightarrow{B'P} - \overrightarrow{B'P} = -\frac{8}{5}\overrightarrow{B'P}$$

que l'on peut écrire sous la forme $\overrightarrow{PB'} = \frac{5}{8}\overrightarrow{PQ}$.

$$\text{Ainsi } \overrightarrow{B''Q} = \overrightarrow{PB'} = \frac{5}{8}\overrightarrow{PQ}.$$

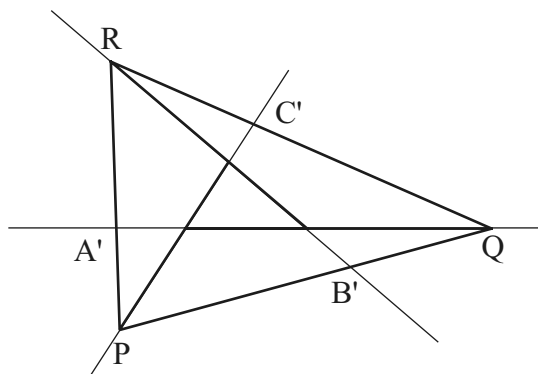
$$\text{Observons que } \overrightarrow{B'Q} = \overrightarrow{B'P} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PQ} - \frac{5}{8}\overrightarrow{PQ} = \frac{3}{8}\overrightarrow{PQ}$$

$$\text{et } \overrightarrow{B''P} = \overrightarrow{B''Q} + \overrightarrow{QP} = \frac{5}{8}\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PQ} = -\frac{3}{8}\overrightarrow{PQ}$$

$$\text{Ainsi } \overrightarrow{B'P} = -\frac{5}{8}\overrightarrow{PQ} \text{ donc } 3\overrightarrow{B'P} + 5\overrightarrow{B'Q} = \vec{0}$$

Ce qui montre que **B'** est le **barycentre de (P,3) et (Q,5)** et son symétrique B'' par rapport à I est barycentre de (P,5) et (Q,3).

Synthèse



On construit B' le barycentre de (P,3)(Q,5), C' celui de (Q,3)(R,5) et A' celui de (R,3)(P,5).

On trace les droites (RB') (PC') et (QA') et les intersections A, B, C de celles-ci deux à deux.

Montrons que ce triangle ABC répond à la question. Pour cela, considérons par exemple A qui est barycentre de R et B' et aussi de P et C'. En prenant un poids total égal à 1,

$$A = \text{bar} \left[\begin{array}{cc} C' & P \\ a & 1-a \end{array} \right] = \text{bar} \left[\begin{array}{cc} B' & R \\ b & 1-b \end{array} \right]$$

le théorème d'associativité donne donc

$$A = \text{bar} \left[\begin{array}{ccc} Q & R & P \\ \frac{3}{8}a & \frac{5}{8}a & 1-a \end{array} \right] = \text{bar} \left[\begin{array}{ccc} P & Q & R \\ \frac{3}{8}b & \frac{5}{8}b & 1-b \end{array} \right]$$

les deux systèmes de points ayant un poids total égal à 1, on en déduit :

$$\begin{cases} \frac{3}{8}a = \frac{5}{8}b \\ \frac{5}{8}a = 1 - b \\ 1 - a = \frac{3}{8}b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a = 5b \\ 5a + 8b = 8 \\ 8a + 3b = 8 \end{cases}$$

d'où $a = \frac{40}{49}$ et $b = \frac{24}{49}$ donc finalement

$$A = \text{bar} \begin{bmatrix} P & Q & R \\ \frac{9}{49} & \frac{15}{49} & \frac{25}{49} \end{bmatrix} = \text{bar} \begin{bmatrix} P & Q & R \\ 9 & 15 & 25 \end{bmatrix}$$

On démontre de même que

$$B = \text{bar} \begin{bmatrix} P & Q & R \\ \frac{25}{49} & \frac{9}{49} & \frac{15}{49} \end{bmatrix} \text{ et } C = \text{bar} \begin{bmatrix} P & Q & R \\ \frac{15}{49} & \frac{25}{49} & \frac{9}{49} \end{bmatrix}$$

P est barycentre de A et B. Posons $P = \text{bar} \begin{bmatrix} A & B \\ p & 1-p \end{bmatrix}$; on en déduit :

$$\begin{aligned} P &= \text{bar} \begin{bmatrix} P & Q & R & P & Q & R \\ \frac{9p}{49} & \frac{15p}{49} & \frac{25p}{49} & \frac{25(1-p)}{49} & \frac{9(1-p)}{49} & \frac{15(1-p)}{49} \end{bmatrix} \\ &= \text{bar} \begin{bmatrix} P & Q & R \\ 25-16p & 9+6p & 15+10p \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Cela impose $6p + 9 = 0$ et $10p + 15 = 0$ soit $p = -\frac{3}{2}$.

Ainsi $P = \text{bar} \begin{bmatrix} A & B \\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix} = \text{bar} \begin{bmatrix} A & B \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ qui donne la relation vectorielle : $2\overrightarrow{AP} = 5\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{AP} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AB}$.

Les deux autres relations s'obtiennent de la même façon. Le triangle ABC construit répond bien à la question.

Variante rédactionnelle par F. LO JACOMO

La droite (AC) recoupe (PQ) en B' et la parallèle à (AC) passant par B recoupe (PQ) en B". Appliqué aux triangles APB' et BQB", le théorème de Thalès s'écrit, en mesures algébriques : $\overline{PB'} = \frac{5}{2}\overline{B''B'}$ et $\overline{B''Q} = \frac{5}{2}\overline{B''B'} = \overline{PB'}$, donc $\overline{B'Q} = \frac{3}{2}\overline{B''B'} = \frac{3}{5}\overline{B''Q} = \frac{3}{5}\overline{PB'}$. Il en résulte que le point B' est barycentre de P, Q affectés de coefficients $\left(\frac{3}{5}, 1\right)$. De même pour l'intersection A' de (BC) avec (PR) et C' de (AB) avec (QR) : s'il existe un triangle ABC solution, ses sommets sont nécessairement les intersections des droites (RB'), (QA'), (PC') où B', A', C' sont les barycentres respectivement de P et Q, R et P, Q et R affectés des mêmes coefficients $\left(\frac{3}{5}, 1\right)$.

Mais le triangle ABC ainsi construit est-il bien solution ? La droite (RB') est l'ensemble des barycentres de R et de B', donc tout point de cette droite hormis R lui-même est barycentre de P, Q, R affectés de coefficients $\left(\frac{3}{5}, 1, z\right)$. De même, tout point de (PC) hormis P lui-même est barycentre de P, Q, R affectés de coefficients $\left(x, \frac{3}{5}, 1\right)$ ou, ce qui revient au même : $\left(\frac{5x}{3}, 1, \frac{5}{3}\right)$. A, qui appartient aux deux droites, est donc barycentre de P, Q, R affectés de coefficients $\left(\frac{3}{5}, 1, \frac{5}{3}\right)$ et de même B et C ont pour coordonnées barycentriques : $\left(\frac{5}{3}, \frac{3}{5}, 1\right)$ et $\left(1, \frac{5}{3}, \frac{3}{5}\right)$. Il est clair que la somme s des coordonnées barycentriques ainsi écrites est la même pour les trois points, d'où l'on déduit que le barycentre de A, B affectés de coefficients (3, -5) est P, ce qui revient à écrire vectoriellement : $3\overrightarrow{PA} - 5(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{0}$, soit $\overrightarrow{AP} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AB}$, et de même pour $\overrightarrow{BQ}$ et $\overrightarrow{CR}$: le triangle ainsi construit est bien le triangle solution.

COMMENTAIRE

L'analyse conduit à l'expression d'une condition « nécessaire ».

Dès lors :

- ou bien (1) on part d'un triangle PQR auquel on essaie d'associer