

l'ombre.

***Remarque :** Ce problème peut avoir plusieurs prolongements (mais pas toujours simples !) On peut, par exemple, déplacer la colonne, changer son orientation, sa forme. Plein de nouveaux problèmes en perspective.*

COMMENTAIRES par l'équipe « Brochure »

- Quel beau sujet ! Un régal !
 - A défaut de Cabri ou de tout autre logiciel de géométrie dynamique, quelques essais de figures, rapides sur de grandes feuilles quadrillées, permettraient de conjecturer l'invariance de HK .
 - Un tel sujet peut être donné dès le collège...
- N'hésitons pas : il est si propre à faire aimer la géométrie !

DEUXIÈME SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 3)

ÉNONCÉ (de Gérard FLEURY)

Dans la suite, nous appellerons « mot » une suite finie de lettres. Un mot n'a pas nécessairement de sens (en français). Il peut même être imprononçable !

Partie 1

Nous nous autorisons deux règles de transformation des mots :

- règle 1 : toute consonne peut être remplacée par une consonne, toute voyelle peut être remplacée par une voyelle
- règle 2 : toute consonne peut être doublée, toute voyelle peut être doublée.

Donnons quelques définitions :

- Deux mots tels que l'on puisse passer de l'un à l'autre en n'utilisant que la règle 1 sont dits « frères ». Par exemple, « chlore » et « frwihu » sont frères.
- Si l'on peut passer du mot 1 au mot 2 en n'utilisant que les règles 1 ou 2, alors on dit que le mot 1 « engendre » le mot 2. Par exemple, « sole » engendre « chlore », mais « seaux » n'engendre pas « chlore ».
- Un « ancêtre » d'un mot engendre ce mot et n'est engendré que par ses frères. Par exemple « sole » est un ancêtre de « chromée ».

Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

- 1) Deux mots engendrant un même mot sont frères.
- 2) Deux mots ayant un ancêtre commun sont frères.
- 3) Deux ancêtres d'un même mot sont frères.
- 4) Deux mots engendrant deux mots non frères ne peuvent pas être frères.
- 5) Deux mots ayant des ancêtres non frères ne peuvent pas être frères.

Partie 2

Désormais, ajoutons une troisième règle :

- Règle 3 : Lorsqu'une consonne est suivie d'une voyelle, on peut échanger leurs places. Par exemple, on peut ainsi passer du mot « motte » à « motet », mais pas de « motte » à « mtote ».

Utilisons maintenant la définition suivante : si l'on peut passer du mot 1 au mot 2 en n'utilisant que les règles 1, 2, ou 3, alors on dira que le mot 1 « produit » le mot 2. Par exemple, « lou » produit « chlore », mais ce n'est pas le cas de « ole ».

Donner (en justifiant votre réponse) une liste aussi courte que possible, de mots produisant tous les mots.

SOLUTION 1 (de G. FLEURY)

Partie 1

Nous utiliserons des mots formés à partir de deux lettres « a » et « b ». Tout mot est frère de l'un de ceux-là.

- 1) *deux mots engendrant un même mot sont frères.* C'est **faux**, car « baa » et « bba » engendrent « bbaa » sans être frères.
- 2) *deux mots ayant un ancêtre commun sont frères.* C'est **faux** car « baa » et « bba » ont même ancêtre « ba » sans être frères.
- 3) *deux ancêtres d'un même mot sont frères.* C'est **vrai**. Pour le voir, notons « A » une suite finie (non vide) de voyelles consécutives, et « B » une suite finie (non vide) de consonnes consécutives, et « X » note soit A soit B. Un mot se présente donc comme une suite finie du type : « X...XAB...X » : il est engendré par « X...XabX...X », autrement dit, on peut réduire tous les groupes de voyelles consécutives à une seule, et tous les groupes de consonnes consécutives à une seule et aboutir à un mot où voyelles

et consonnes alternent : or, un mot où alternent voyelles et consonnes est un ancêtre. Donc tout mot a un seul ancêtre formé de « a » ou « b » en alternance. Tous les autres ancêtres sont des frères de celui-ci.

- 4) *deux mots engendrant deux mots non frères ne peuvent pas être frères.* C'est **faux**, car « ba » et « ba » engendrent « baa » et « bba » qui ne sont pas frères.
- 5) *deux mots ayant des ancêtres non frères ne peuvent pas être frères.* C'est **vrai** en vertu de 3).

Partie 2

La liste « a », « b », « ba » convient. En effet,

- « a » engendre « aa » ; « b » engendre « bb » ; « ba » engendre « ab ». Donc « a », « b » et « ba » produisent tous des mots de deux lettres.
- Supposons que « a », « b » et « ba » produisent tous les mots de n lettres avec $n \geq 2$. Considérons un mot de $(n + 1)$ lettres.
 - Soit le mot alterne voyelles et consonnes, c'est-à-dire qu'il est de la forme « X...Xbab » ou « X...Xaba »
 - S'il est de la forme « X...Xbab », il est produit par « X...Xbba » donc par « X...Xba » qui comporte n lettres, donc par « a », « b » ou « ba » par hypothèse de récurrence.
 - S'il est de la forme « X...Xaba », il est produit par « X...Xbaa » donc par « X...Xba » qui comporte n lettres, donc par « a », « b » ou « ba » par hypothèse de récurrence.
 - Soit il comporte au moins une suite de 2 voyelles (ou de 2 consonnes) consécutives. Alors il est produit par un mot de n lettres obtenu en retirant une voyelle (ou une consonne) de la suite, donc il est produit par « a », « b » ou « ba » par hypothèse de récurrence.

La liste « a », « b », « ba » produit tous les mots de $n + 1$ lettres.

SOLUTION (de F. LO JACOMO)**Partie 1**

- Deux mots engendrant un même mot peuvent ne pas être frères, vu que « sole » et « frwihu » engendrent tous deux « chlore » sans être frères.
- Deux mots ayant un ancêtre commun ne sont pas nécessairement frères vu que « sole » est un ancêtre commun de « chlore » et « chromée » qui ne sont pas frères.
- Oui, deux ancêtres d'un même mot sont frères. Appelons « structure » d'un mot une suite CVCVCV où chaque C représente une consonne ou un groupe de consonnes du mot et chaque V une voyelle ou un groupe de voyelles du mot. Par exemple, « chromée » a pour structure CVCV. il est clair que les transformations 1 et 2 respectent la structure. La règle 1 conserve également le nombre de consonnes ou de voyelles de chacun des groupes C ou V, alors que la règle 2 permet d'augmenter ce nombre. On en déduit qu'un ancêtre d'un mot a même structure que ce mot, mais que chaque groupe de consonnes ou voyelles est réduit à une seule lettre, sinon on trouverait un mot de même structure donc chaque groupe serait réduit à une lettre, qui engendrerait le prétendu ancêtre sans être son frère, ce qui contredirait la définition d'un ancêtre. Donc deux ancêtres d'un même mot ont même structure, avec tous deux des groupes d'une seule lettre, ce qui prouve qu'ils sont frères.
- Deux mots engendrant des mots non frères peuvent être frères, sinon un même mot (frère de lui-même) n'engendrerait que des frères, et il n'y aurait pas de différence entre les deux règles de transformation.
- Deux mots ayant des ancêtres non frères ne peuvent pas être frères, car deux ancêtres non frères ont nécessairement des structures différentes. Or un mot et tous ses frères ont même structure que ses ancêtres.

Partie 2

La règle 3 ne s'applique pas aux mots de structure V ou de structure VC, mais le mot « a » engendre tout autre mot de structure V, et le mot « ab » engendre tout autre mot de structure VC. Toute autre structure VCVCVCV... est produite par le mot « aba » car « aba » engendre « abbaa », où l'on peut permuter par la règle 3 : « ababa » qui à son tour engendre « abbaaba » où l'on peut encore permuter : « abababa », et ainsi de suite... Si l'on veut une structure qui se termine par une consonne, il suffit de transformer « aba » en « abba » avant de permuter

« abab ». Les trois mots « a », « ab » et « aba » produisent donc des frères de tous les ancêtres commençant par une voyelle, qui, à leur tour, engendrent tous les mots commençant par une voyelle.

Par ailleurs, la règle 3 ne s'applique pas non plus aux mots de structure C, donc on a besoin du mot « b » pour engendrer (donc produire) ces derniers. Les mots de structure CV peuvent être produits par « ba », mais « ba » produit également « ab » ci-dessus, ainsi que « baa » donc « aba » ci-dessus. Et « ba » produit « bbaa » donc « baba », tout comme il produit « bba » donc « bab ». Il produit donc tout mot commençant par une consonne ainsi que les mots « ab » et « aba ».

Dès lors, les trois mots « a », « b » et « ba » produisent tous les autres, et aucun d'eux ne peut être supprimé de cette liste, vu qu'aucune règle ne permet de créer des consonnes ou des voyelles dans un mot qui n'en a pas, ni d'en supprimer dans un mot qui en a.

COMMENTAIRES (de l'équipe « brochure »)

Un exercice remarquable par sa mise en jeu de deux très importantes méthodes de raisonnement mathématique (recherche de contre-exemple et démonstration par récurrence) tout en n'exigeant aucune connaissance mathématique !

J'oubliais : il a aussi le mérite d'obliger à se colleter avec l'énoncé pour bien l'assimiler ? Sinon...