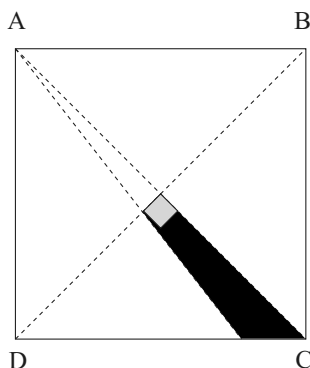


CLERMONT

PREMIER SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 1)

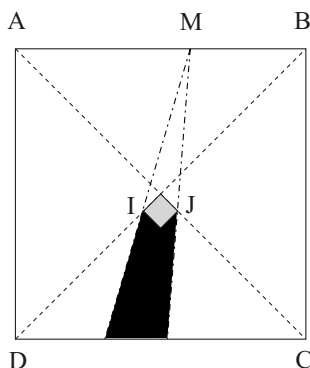
ÉNONCÉ (dû à Laurent GERMA)

On considère une pièce carrée $ABCD$ munie d'une lampe située dans le coin A qui éclaire toute la pièce. On installe alors une colonne à base carrée située comme dans le croquis suivant (deux de ses faces sont adossées aux diagonales de $ABCD$) :



Peut-on réduire l'ombre ainsi créée en déplaçant la lampe (assimilée à un point) sur le côté $[AB]$ de la pièce ?

SOLUTION 1 (de L. GERMA)



Soit M un point courant du côté $[AB]$.

L'aire des triangles MIJ est constante (même base, même hauteur).

Une ombre minimale correspond à une aire minimale du triangle MHK, c'est-à-dire à une base [HK] minimale, car la hauteur de ce triangle est la longueur d'un côté de la pièce.

D'après le théorème de Thalès $\frac{IJ}{HK} = \frac{BE}{BC}$, c'est-à-dire que la longueur HK reste constante.

Réponse : « NON, l'ombre a une aire constante ».

SOLUTION 2, avec compléments (de François LO JACOMO)

(Conservons les notations de la solution 1)

Le fait que la colonne soit adossée aux deux diagonales signifie que les angles $\widehat{MJA}$ et $\widehat{BIM}$ sont compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. Il en résulte que $H = (MI) \cap (CD)$ et $K = (MJ) \cap (CD)$ sont bien sur le segment [CD]. Dès lors, l'ombre a pour aire : aire(MHK) - aire(MIJ) - $\frac{1}{2}$ aire(colonne).

Or, en posant $a = AB$ et $t = IJ$, la hauteur du triangle MIJ ne dépend pas de M. Elle est toujours égale à $\frac{a+t}{2}$ et l'aire de MIJ est constante,

égale à $\frac{t(a+t)}{4}$. Qui plus est, d'après Thalès, $\frac{HK}{IJ} = \frac{2a}{a+t}$ est lui aussi

constant, tout comme $HK = \frac{2at}{a+t}$ et aire(MHK) = $\frac{a^2t}{a+t}$. L'aire de la

colonne étant constante ($= \frac{t^2}{2}$), l'aire de l'ombre est constante, elle est même égale à

$$\begin{aligned} \frac{a^2t}{a+t} - \frac{t(a+t)}{4} - \frac{t^2}{4} &= \frac{t(3a^2 - 3at - 2t^2)}{4(a+t)} \\ &= -\frac{t^2}{2} - \frac{at}{4} + a^2 - \frac{a^3}{a+t}. \end{aligned}$$

Ce calcul explicite n'était pas demandé, mais il permet de se rendre compte que, lorsque t varie de 0 à $\frac{a}{2}$, l'aire passe par un maximum. En

posant $x = \frac{2a}{a+t}$ et en multipliant la dérivée de l'aire par $\frac{8}{a+t}$, on constate qu'elle s'annule lorsque $x^3 + 3x - 8 = 0$, ce qui se résout par la formule de Cardan ;

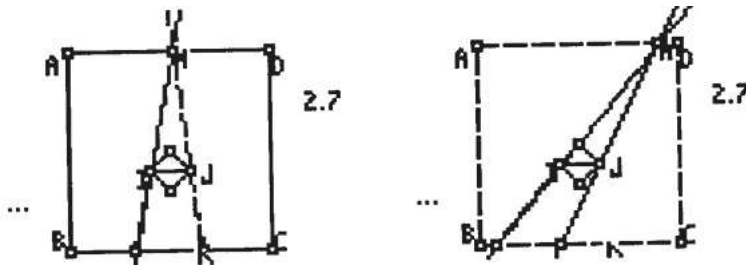
$$x = (4 + \sqrt{17})^{1/3} - (4 + \sqrt{17})^{-1/3} = 1,51274\dots$$

soit $t = \frac{a(2-x)}{x} = 0,3221\dots a$. De fait, pour $t = 0$, l'aire de l'ombre est

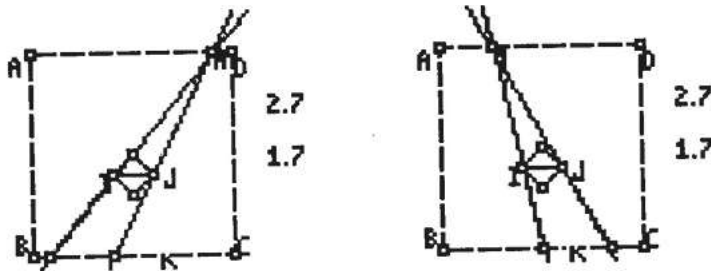
nulle, pour $t = \frac{a}{3}$, elle vaut $\frac{a^2}{9}$ alors que pour $t = \frac{a}{2}$, elle vaut $\frac{a^2}{12}$.

Approche Cabri Junior

On construit un carré ABCD puis un carré IOJP s'appuyant sur les diagonales qui se coupent en O. On choisit un point M sur [AD], les droites (MI) et (MJ) coupent [BC] en H et K et on demande d'afficher l'aire de IJKH. On déplace M sur [AD] et l'aire affichée est toujours la même.



On demande d'afficher la longueur HK, on déplace M sur [AD], on constate encore que le deuxième nombre affiché ne change pas.



Il ne reste plus qu'à démontrer ce résultat affiché.

Les triangles MIJ et MHK sont semblables et même homothétiques. MIJ a une hauteur h relative au côté [IJ] constante (distance entre les droites (IJ) et (AD)). Comme [IJ] est fixe, le triangle MIJ a toujours la même aire.

La hauteur de MHK relative au côté [HK] est constante et égale à AB . Le rapport d'homothétie des deux triangles est un rapport fixe et vaut $\frac{h}{AB}$. Comme l'aire de MIJ est constante, celle de MHK l'est aussi. Il en résulte que l'aire de IJKH est constante, donc on ne peut pas réduire