

Le but de la deuxième question est d'examiner si cette baisse, effectuée sur les salaires à partir d'un certain niveau, crée ou non un effet de seuil. Parmi les justifications trouvées, peu sont suffisantes, car la liaison entre le nouveau salaire et l'ancien n'est pas clairement explicitée sous forme d'une fonction affine par intervalles.

Pour finir, l'hypothèse de répartition uniforme, permettant de ramener chaque classe à son centre, est, en général, bien comprise et il n'est donc pas rare de trouver un calcul correct de la dépense occasionnée par l'augmentation, mais il en est tout autrement pour celui de la recette procurée par la taxe !

3. De François LO JACOMO

Cet exercice « qui rappelle (N.D.L.R. : pour les adultes imposables !) tous les calculs pénibles d'impôts, a une application concrète mais s'éloigne des mathématiques pures. Comme, d'ailleurs, dans l'autre exercice académique, la difficulté n'est pas tant dans le raisonnement que dans la traduction, sans erreur de calcul, d'une réalité concrète en expression mathématique. La réponse à la deuxième question du premier (A gagne plus que B) devrait être évidente sans calcul, il serait intéressant de voir combien de candidats disposent d'une telle intuition. »

4. De l'équipe « brochure »

L'exercice est intéressant... et apprend à être attentif aux énoncés ! L'usage d'une calculatrice pouvait faciliter essais et **contrôles**.

De plus, hors épreuve, l'exercice peut susciter d'intéressantes discussions !

DEUXIÈME SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 3)

ÉNONCÉ

Trois boules de pétanque d'un diamètre de 6 cm sont posées l'une contre l'autre sur un plan horizontal.

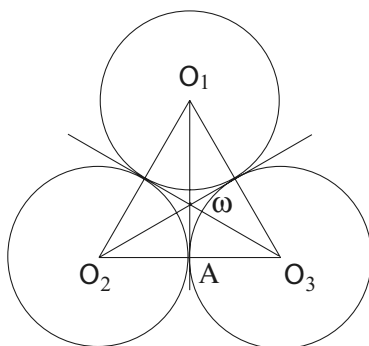
1^o) Quel est le diamètre minimal du cochonnet disposé entre ces trois boules pour qu'il ne tombe pas entre celles-ci ?

2°) Quel est le diamètre du cochonnet disposé entre ces trois boules pour que l'on puisse poser au-dessus une planche en contact avec les trois boules et le cochonnet ?

3°) Quel est le diamètre du cochonnet disposé entre ces trois boules pour que l'on puisse poser au-dessus une quatrième boule en contact avec les trois premières boules et le cochonnet ?

SOLUTION 1

1°) Soient les B_1, B_2 et B_3 les trois boules de centres respectifs O_1, O_2 et O_3 , de rayon 3 cm et d'enveloppes sphériques respectives S_1, S_2 et S_3 . $O_1O_2O_3$ est un triangle équilatéral de 6 cm de côté. Soit ω son centre de gravité.



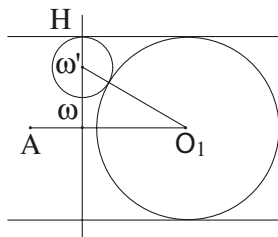
Rechercher le diamètre minimal du cochonnet revient à déterminer le rayon r du cercle de centre ω tangent à C_1, C_2 et C_3 , intersections respectives de S_1, S_2 et S_3 avec le plan contenant O_1, O_2 et O_3 .

$O_1O_2O_3$ étant un triangle équilatéral, on a $\widehat{\omega O_1 O_2} = \frac{\pi}{6}$.

$$\text{Alors } r = O_1\omega - 3 = \frac{O_1O_2/2}{\cos(\pi/6)} - 3 = \frac{3}{\sqrt{3}/2} - 3 = 2\sqrt{3} - 3.$$

Le rayon minimal du cochonnet est donc $(2\sqrt{3} - 3)$ cm.

2°) Avec les mêmes notations qu'à la question précédente, soit B' le cochonnet de centre ω' et de rayon recherché r' .



$O_1O_2O_3\omega'$ est un tétraèdre de base $O_1O_2O_3$, triangle équilatéral, et dont le projeté orthogonal du sommet ω' sur le plan contenant la base est ω . Soit $\alpha = \widehat{\omega O_1 \omega'}$. Dans le triangle $\omega O_1 \omega'$, rectangle en ω , on peut écrire

$$\cos \alpha = \frac{O_1 \omega}{O_1 \omega'} = \frac{2\sqrt{3}}{3+r'} \text{ et } \sin \alpha = \frac{\omega \omega'}{O_1 \omega'} = \frac{3-r'}{3+r'}.$$

Or $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$.

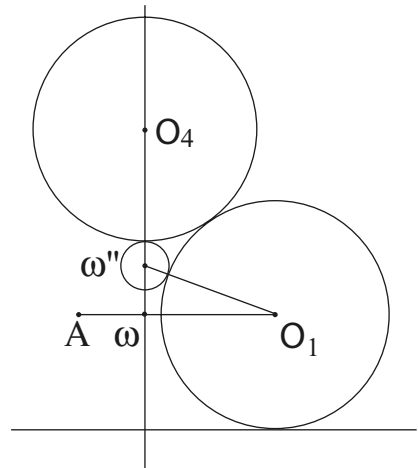
Donc $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3+r'}\right)^2 + \left(\frac{3-r'}{3+r'}\right)^2 = 1$ d'où $12 + (3-r')^2 = (3+r')^2$ par multiplication des deux membres par $(3+r')^2$ ou encore $12 + 9 - 6r' + r'^2 = 9 + 6r' + r'^2$ après développement, soit enfin $r' = 1$ après réduction et simplification.

Le rayon du cochonnet est donc 1 cm. Ce résultat est bien cohérent avec celui de la question 1 puisque $1 > 2\sqrt{3} - 3$.

3°) Avec les mêmes notations qu'aux questions précédentes, soit B'' le cochonnet de centre ω'' et de rayon recherché r'' . Soit B_4 la quatrième boule de centre O_4 .

$O_1 O_2 O_3 O_4$ est un tétraèdre régulier de centre de gravité ω'' et $O_1 O_2 O_3 \omega''$ est un tétraèdre de base $O_1 O_2 O_3$ triangle équilatéral.

Le projeté orthogonal de O_4 et de ω'' sur le plan contenant la base est ω . Soit h la hauteur du tétraèdre $O_1 O_2 O_3 O_4$. Dans le triangle $O_1 O_4 \omega$, rectangle en ω , d'après Pythagore, $O_4 \omega^2 + O_1 \omega^2 = O_1 O_4^2$ d'où $h^2 + 12 = 36$ donc $h = 2\sqrt{6}$.



Soit $\alpha' = \widehat{\omega O_1 \omega''}$. Dans le triangle $\omega O_1 \omega''$, rectangle en ω , on peut écrire :

$$\cos \alpha' = \frac{O_1 \omega}{O_1 \omega''} = \frac{2\sqrt{3}}{3+r''} \text{ et } \sin \alpha' = \frac{\omega \omega''}{O_1 \omega''} = \frac{h-3-r''}{3+r''}.$$

Or $\cos^2 \alpha' + \sin^2 \alpha' = 1$.

$$\text{Donc } \left(\frac{2\sqrt{3}}{3+r''}\right)^2 + \left(\frac{h-3-r''}{3+r''}\right)^2 = 1,$$

d'où $12 + (h-3-r'')^2 = (3+r'')^2$ par multiplication des deux membres par $(3+r'')^2$

soit $12 + h^2 - 6h + 9 - 2hr'' + 6r'' + r''^2 = 9 + 6r'' + r''^2$ après développement

ou $r'' = \frac{12 - 6h + h^2}{2h}$ après réduction et division par $2h$

ou encore $r'' = \frac{12 - 12\sqrt{6} + 24}{4\sqrt{6}}$ en remplaçant h par sa valeur

soit enfin $r'' = \frac{3\sqrt{6}}{2} - 3$ après réduction et simplification.

Le rayon du cochonnet est donc $\left(\frac{3\sqrt{6}}{2} - 3\right)$ cm.

Ce résultat est bien cohérent avec celui de la question 1 puisque $\frac{3\sqrt{6}}{2} - 3 > 2\sqrt{3} - 3$.

SOLUTION 2 (de F. LO JACOMO)

Appelons $R = 3$ cm le rayon des boules de pétanque et r le rayon du cochonnet. Les trois boules se touchent, donc leurs centres A, B, C forment, dans un plan (P), un triangle équilatéral de côté $2R$. Le centre O du cochonnet se projette en H sur le plan (P), avec $OH = d$. $OA^2 = d^2 + HA^2$, donc pour que le cochonnet touche les trois boules, il faut que H soit le centre du triangle équilatéral ABC ($HA = HB = HC = \frac{2R}{\sqrt{3}}$,

et qu'on ait : $(R + r)^2 = d^2 + \frac{4R^2}{3}$).

1- Pour cette question, on doit avoir : $(R + r)^2 = d^2 + \frac{4R^2}{3}$ pour $d = 0$, soit $r = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right) R$. Le diamètre minimal du cochonnet est, en cm : $4\sqrt{3} - 6 \approx 0,928$.

2- L'hypothèse se traduit par : $d = R - r$, car la planche, à une distance R de (P) est à une distance r du centre du cochonnet. Donc $4R = \frac{4R^2}{3}$, $r = \frac{R}{3}$, le diamètre du cochonnet est 2 cm.

3- Les quatre boules sont les sommets d'un tétraèdre régulier de côté $2R$, et le cochonnet, à égale distance des quatre sommets, est le centre du tétraèdre. Cette hauteur h vérifie : $h^2 + \frac{4R^2}{3} = (2R)^2$, soit $h = R\sqrt{\frac{8}{3}}$ et la distance du cochonnet au centre d'une boule vaut $R + r = h - d$ d'où

$$(h-d)^2 = d^2 + \frac{4R^2}{3}, \text{ donc } 2hd = h^2 - \frac{4R^2}{3}, d = \frac{R}{\sqrt{6}} \text{ et } r = \left(\sqrt{\frac{3}{2}} - 1 \right) R.$$

Le diamètre cherché est, en cm : $3\sqrt{6} - 6 \approx 1,348 \dots$. On retrouve aussi le résultat classique $d = \frac{h}{4}$: le centre du tétraèdre est situé au quart de la hauteur.

COMMENTAIRES

1. de l'équipe académique

Cet exercice de géométrie dans l'espace, comme ceux sur le même sujet des années précédentes, a connu peu de succès, de nombreux candidats considérant comme coplanaires des points qui ne l'étaient pas.

2. de Michel REGNAULT

Trois assemblages de boules que l'on représente sans peine - mais joue-t-on encore aux billes dans les cours d'école en posant des pyramides ? - et que le texte présente sans lien apparent entre eux. Mais le premier sert de support pour les deux autres qui font intervenir, en plus, un plan et une sphère. On comprend alors qu'il fournit une condition dont il va falloir tenir compte.

Pour étudier ce type de configuration dans l'espace, il faut trouver le bon plan : ... de coupe bien sûr, celui qui contient le maximum d'éléments nécessaires à la résolution et qui permet de représenter, en vraie grandeur, une figure contenant ces éléments.

Dans la première question, il est clair que le plan contenant les trois centres est le bon, car on peut faire apparaître le triangle équilatéral formé par les trois centres, les grands cercles des trois sphères et le plus petit cercle diamétral possible pour un cochonnet : c'est d'ailleurs une partie qui est correctement traitée par plusieurs candidats.

Pour la suite, une coupe suivant le plan médiateur du segment formé par deux centres des sphères reposant sur le plan horizontal fournit une figure éclairante car ce plan est diamétral pour le cochonnet, pour la troisième sphère, et même pour la quatrième dans le 3°, d'où le calcul du rayon sans grosse difficulté, sans oublier de comparer le résultat avec la condition obtenue en 1°.

Chaque fois qu'un problème de géométrie dans l'espace est proposé, on peut faire les mêmes constatations : manque de méthode, d'initiative et mauvaise perception de la réalité traduite parfois par des figures planes paradoxales.

3. de F. LO JACOMO

(Cf. son commentaire du premier sujet).

La première et la troisième question font appel au même raisonnement ; je ne suis pas sûr que la troisième question soit plus difficile que la seconde.

4. de l'équipe « brochure »

Encore un exercice intéressant, qui valorise la géométrie dans l'espace, une géométrie aisément ramenée à des configurations planes classiques... si et seulement si on dispose d'une bonne image mentale de la situation... Mais ceci se cultive !

La méthode de F.L.J. montre l'intérêt, quand c'est possible, d'une formulation d'une situation générale (ici cochonnet tangent aux trois boules, elles-mêmes...) avant toute étude de cas particuliers, ceux-ci se traitant alors à la vitesse V !... Mais il faut oser cela et ne pas s'engluier immédiatement dans les questions. D'autant que le premier sujet académique, lui, permettait un traitement plus rapide si on le prenait question après question ou en s'en tenant chaque fois à la seule question traitée. Il n'y a donc pas lieu d'absolutiser telle ou telle façon de faire...

Un texte analogue a été posé dans le « Rallye d'Auvergne » de 1998. (Cf. Panoramath 2 pp. 146 et 148)

ANNEXES

1 - Participation et prix :

Série	Inscrits			Présents			Primés		
	F.	G.	Total	F.	G.	Total	F.	G.	Total
IS	51	79	130	26	46	73	0	2	2
Autres	1	0	1	1	0	0	0	0	0
Total	52	79	131	27	46	73	0	2	2

La commission a, une fois de plus, déploré le fort absentéisme, moins important cependant que l'année précédente. Le nombre des inscrits a

été supérieur et surtout les candidatures ont été plus spontanées.

Palmarès académique :

1^{er} prix : BAZIN Kilian (Lycée Charles de Gaulle, Caen)

2^{ème} prix : MARTIN Julien (Lycée Napoléon, L'Aigle).

Ordre croissant de réussite sur les quatre exercices :

En moyenne :

- Exercice 2 : Sujet national de la feuille repliée.
- Exercice 1 : Sujet académique 1 sur les impôts.
- Exercice 3 : Sujet académique 2 sur les boules.
- Exercice 4 : Sujet national des nombres échangeables.