

- Résolution de l'équation $x + y + z + 2 = xyz$.

On peut supposer $1 \leq x \leq y \leq z$, donc $xyz \leq 3z + 2$, ce qui implique $xy \leq 3 + \frac{2}{z} \leq 5$ et, comme $xy \neq 1$, alors $2 \leq xy \leq 5$, d'où les quatre cas :

Premier cas : $(x, y) = (1, 2)$. On a $z = 5$.

Deuxième cas : $(x, y) = (1, 3)$. On a $4 + z + 2 = 3z$, d'où $z = 3$.

Troisième cas : $(x, y) = (1, 4)$. C'est impossible vu que $3z = 7$.

Quatrième cas : $(x, y) = (2, 2)$. On a $z + 6 = 4z$, d'où $z = 2$.

Cinquième cas : $(x, y) = (1, 5)$. C'est impossible vu que $4z = 7$.

Finalement les solutions de l'équation proposée sont $(1, 2, 5)$, $(1, 3, 3)$ et $(2, 2, 2)$

- Une autre méthode de résolution de cette équation est exposée dans l'ouvrage [5].

- Je tiens à remercier vivement Monsieur *Andrzej Shinzel* de l'Académie des Sciences de Varsovie, pour m'avoir communiqué la solution suivante sur la résolution de l'équation : $x + y + z + n = xyz$.

1) Si l'un au moins des nombres est égal à 1, par exemple $z = 1$, on résout l'équation $(x - 1)(y - 1) = n + 2$, en décomposant en facteurs premiers le nombre $n + 2$.

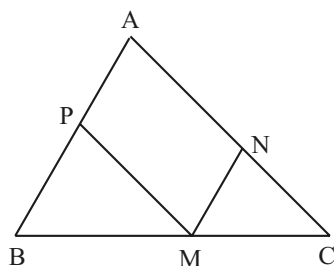
2) Si les nombres x, y, z sont supérieurs ou égaux à 2, alors, par utilisation de l'inégalité $xyz - x - y - z > (x - 1)(y - 1)(z - 1)$, les solutions de notre équation peuvent être choisies parmi les solutions (en nombre fini) de l'inégalité $(x - 1)(y - 1)(z - 1) < n$.

DEUXIÈME SUJET ACADÉMIQUE(Exercice n°4)

ÉNONCÉ

Un segment de longueur p ($p > 0$) étant donné, on cherche à construire un parallélogramme $ANMP$ ayant pour périmètre $2p$, comme indiqué sur la figure ci-dessous, M, N et P appartenant chacun à l'un des côtés du triangle.

On note a la longueur du côté $[BC]$, b celle du côté $[AC]$ et c celle du côté $[AB]$. On suppose $b \geq c$.



1. Discuter, suivant les valeurs de p , l'existence d'un tel parallélogramme
 - lorsque $b = c$
 - lorsque $b > c$
2. Proposer, lorsque le problème a une solution, une construction du parallélogramme à la règle non graduée et au compas.

SOLUTION

Rédaction 1

1-a) Si $b = c$, MNC est isocèle et $p = b$ est la seule possibilité, M étant n'importe quel point de $[BC]$.

b) Si $b > c$, on pose $x = BM$ et, par Thalès, on trouve $p = PM + MN = \frac{bx}{a} + \frac{c(a-x)}{a}$, d'où l'on déduit $x = \frac{a(p-c)}{b-c}$.

Comme il faut avoir $0 \leq x \leq a$, on a une solution si $c \leq p \leq b$.

Autre solution : par Thalès, on a : $\frac{MN}{c} = \frac{CN}{b}$; donc, puisque $b > c$, on a $CN > MN$, donc $p < b$.

De même, on a $\frac{MP}{b} = \frac{BP}{c}$ et donc $p > c$.

2) On porte p et c sur $[AC]$ en partant de A , on obtient D et E . On trace la parallèle à (BE) passant par D , elle coupe $[BC]$ en M .

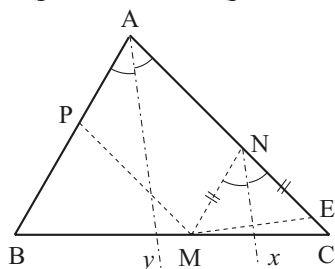
Rédaction 2 De F. Lo Jacomo,

qui juge « *déraisonnable la dissociation des deux questions. Il est aisé de déterminer une condition nécessaire pour que le problème ait une solution, mais pour prouver qu'elle est suffisante, le mieux me semble de construire le dit parallélogramme, comme c'est demandé dans la seconde question* » :

1-2) Si $b = c$, les triangles ABC , mais aussi PBM et NMC (semblables à ABC), sont isocèles, donc $p = AP + PM = AP + PB = b = c$. Si $p = b = c$, le problème admet une infinité de solutions : chaque point P de $[AB]$ convient. Le cercle de centre P et passant par B recoupe (BC) en M , et N s'obtient en reportant la longueur PB sur $[AC]$: $AN = PB$.

Si $b > c$, les triangles ABC , PBM et NMC sont une fois encore semblables, mais cela entraîne, cette fois-ci, $PM > PB$ (donc $p = PM + PA > c$), ainsi que $NM > NC$ (donc $p = NM + NA < b$). La condition nécessaire est que $b > p > c$. Pour prouver que cette condition est suffisante, le mieux est de construire explicitement le parallélogramme lorsque la condition est vérifiée : reportons une longueur $p = AD = AE$ sur les côtés du triangle (D sur la demi-droite $[AB]$ et E sur la demi-droite $[AC]$), comme $b > p > c$, les droites (DE) et (BC) se coupent en un point M intérieur à $[BC]$. La parallèle à (AB) passant par M coupe $[AC]$ en N , la parallèle à (AC) passant par M coupe $[AB]$ en P . Posons $x = AP = MN$, $y = AN = PM$. Les triangles PDM et NME sont manifestement semblables, ce qui entraîne $\frac{PD}{PM} = \frac{NM}{NE}$, soit $\frac{p-x}{y} = \frac{p}{p} = 1$, étant donné la relation élémentaire : si $\frac{u}{v} = \frac{u'}{v'} = \lambda$, $u = \lambda v$, $u' = \lambda v'$ donc $\lambda = \frac{u+u'}{v+v'}$. Il en résulte que $p = x+y$, donc le parallélogramme ainsi formé est bien solution de notre problème. Si un autre point M' était solution, la parallèle à (DE) passant par M' couperait (AB) et (AC) en D' et E' , ADE serait homothétique de ADE' dans un rapport $\frac{p'}{p}$, et le raisonnement ci-dessus prouve que le parallélogramme $AN'M'P'$ aurait pour demi-périmètre p' , qui ne peut être égal à p que si $M' = M$.

Rédaction 3 (niveau collège "avant Thalès") D'Henri Bareil, adoptant la non-séparation des questions.



Une méthode éprouvée conduit à « former » p comme longueur d'un seul segment, ici AE (Cf. figure)

Pour que $AN + NM = p$, il faut et il suffit que le triangle NME soit isocèle de sommet N, ce qui peut se caractériser, avec (Nx) bissectrice de $\widehat{MNE}$, par $(ME) \perp (Ay)$ (1)

Or, du fait des deux translations (deux selon l'ordre) qui associent les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{MNE}$, la bissectrice (Ay) de l'angle $\widehat{BAC}$ a même direction que (Nx) . Et (1) s'écrit aussi $(ME) \perp (Ay)$.

Concluons : $AN + NM = p$ si et seulement si $(ME) \perp (Ay)$.

D'où, à partir de E, la construction de M, et la discussion, puisque M doit appartenir au segment [BC].

P.S.

1) Pour tracer, par E, la perpendiculaire à (Ay) , il suffit de tracer, par E, la parallèle à (BF) , avec F sur $[AC]$, tel que $AF = AB$.

2) En Première, on pourra remarquer que les triangles ABF et NME sont homothétiques, et l'utiliser.

PLUSIEURS SOLUTIONS ONT ÉTÉ PROPOSÉES PAR A.OUARDINI, auteur de l'énoncé.

1 - On suppose que le problème est possible et admet une solution.

Solution 1.

Posons $AP = x$, exprimons le demi-périmètre p du parallélogramme $ANMP$ en fonction de x . Par application du théorème de Thalès, on a : $\frac{BP}{BA} = \frac{PM}{AC}$, ou encore $\frac{c-x}{c} = \frac{PM}{b}$, donc $PM = \frac{b(c-x)}{c}$.

On a $AP + AN = p$, égalité équivalente à $x + \frac{b(c-x)}{c} = p$, donc on aboutit, après réduction à l'équation d'inconnue x : $(b-c)x = c(b-p)$. Deux cas se présentent :

Premier cas : $b = c$

- Si $p = b$, l'ensemble des solutions de l'équation est l'intervalle $]0, b[$, et le problème admet une infinité de solutions.
- Si $p \neq b$, l'équation n'a pas de solution, et le problème n'admet pas de solution.

Deuxième cas : $b > c$

- Dans ce cas, l'équation admet une solution unique $x = \frac{c(b-p)}{b-c}$, donc

une condition nécessaire et suffisante pour que le point P existe est $0 < \frac{c(b-p)}{b-c} < c$, ainsi le problème admet une solution unique si et seulement si $c < p < b$.

- Dans le cas où $c \geq p$ ou $b \geq p$, le problème n'admet aucune solution.

Solution 2.

Ecrivons (en utilisant la formule $S = \frac{1}{2}bc \sin \hat{A} \dots$) que l'aire du triangle ABC est égale à la somme de l'aire du parallélogramme $ANMP$ et de celle des deux triangles BPM et MNC . Après simplification, on retombe sur l'équation en x de la méthode précédente.

Solution 3.

En voici le principe.

Munissons le plan du repère $(A; \vec{i}, \vec{j})$, où $\vec{i} = \frac{1}{AB} \overrightarrow{AB}$ et $\vec{j} = \frac{1}{AC} \overrightarrow{AC}$

1. On détermine l'équation cartésienne du lieu de M tel que P , variant sur $[AB]$, le périmètre considéré soit égal à $2p$.
2. On étudie algébriquement l'intersection de ce lieu avec $[BC]$.

Solution 4.

Elle utilise les propriétés :

« *Si, par un point quelconque de la base d'un triangle isocèle, on mène des parallèles aux deux autres côtés, on forme un parallélogramme dont le périmètre est constant* »

« *Dans tout triangle, au plus grand angle est opposé le plus grand côté et réciproquement* » [1]

A. Ouardini a ensuite proposé des programmes de construction fondés sur les diverses solutions.

COMMENTAIRES

1- de l'équipe académique : cet exercice et le 1 national « ont été dans l'ensemble réussis ».

2- De la rédaction de la brochure : le point de vue de F. Lo Jacomo nous semble raisonnable ! et l'exercice intéressant dès le collège.

PROLONGEMENTS (toujours dûs à A. Ouardini).

Pour M un point de $[BC] - \{BC\}$, désignons par $\pi(M)$ le périmètre du parallélogramme $ANMP$ tel qu'il est défini dans le problème d'olympiade. A la lumière du résultat cité dans la **solution 3**, énonçons la proposition suivante qui nous donne une caractérisation d'un triangle isocèle :

Proposition. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un triangle ABC soit isocèle en A et qu'il existe deux points distincts M et M' de $[BC]$ tels que $\pi(M) = \pi(M')$.*

Preuve de la proposition. Il est clair que la condition est nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante.

Soient M et M' deux points distincts de $[BC]$ vérifiant $\pi(M) = \pi(M')$, E et F des points appartenant respectivement aux demi-droites $[AB)$ et $[AC)$ tels que $PE = PM$ et $NF = NM$. De la même manière on définit les points E' et F' ($E \in [AB)$, $F' \in [AB)$) tels que $P'E' = P'M'$ et $N'F' = N'M'$, ($AN'M'P'$ le parallélogramme tel que $P' \in [AB]$, $N' \in [AC]$) on a :

$$AE = AP + PE = \frac{1}{2}\pi(M) \text{ et } AE' = AP' + P'E' = \frac{1}{2}\pi(M'),$$

puisque $\pi(M) = \pi(M')$, alors $AE = AE'$, donc $E = E'$. De même on montre que $F = F'$.

Par un raisonnement analogue à celui du programme de la deuxième construction, géométrique, on montre que les points E, M et F d'une part et les points E, M' et F d'autre part sont alignés. Finalement, la droite (EF) coupe le segment $[BC]$ et deux points distincts ; cela n'est possible que si les droites (BC) et (EF) sont confondues, donc $E = B$ et $F = C$, ou encore $AB = AC$, ainsi le triangle ABC est isocèle en A .

Autre méthode.

Posons $AP = x$ et $AP' = x'$, en reprenant l'expression du périmètre du parallélogramme (**solution 1** de la question 1) en fonction de x , on a :

$$\frac{1}{2}\pi(M) = x + \frac{b(c-x)}{c} \text{ et } \frac{1}{2}\pi(M') = x' + \frac{b(c-x')}{c},$$

l'égalité $\pi(M) = \pi(M')$ implique : $x + \frac{b(c-x)}{c} = x' + \frac{b(c-x')}{c}$, soit, après réduction : $(x-x')(b-c) = 0$, les points M et M' étant distincts, $x \neq x'$ et, par suite, $b = c$. Donc le triangle ABC est isocèle en A .

ANNEXES

I. PARTICIPATION

156 inscrits - 92 présents.

II. PRIMÉS

Sept élèves (dont cinq du lycée Montaigne à Bordeaux) :

Premier (détaché) : Wang Xi (Lycée Montaigne, Bordeaux)

Deuxièmes exaequo : Le Hot Laurent (lycée G. Eiffel, Bordeaux)

Ducom Alexandre (Lycée Montaigne, Bordeaux).

III. BIBLIOGRAPHIE

(proposéé par A. Ouardini)

[1] **Mahdi Abdeljaouad**

Eléments de géométrie du plan, cours et exercices tome 1.

Publication A.T.S.M., 2000, co-diffusée par l'APMEP sous le n° 504.

[2] **Abderrahim OUARDINI**

Mathematical Excalibur, vol. n° 2 (May 2004-July 2004), problem 201.

The Hong Kong University of Science and Technology.

[3] **Eugène ROUCHÉ et Charles COMBEROUSSE**

Traité de géométrie. p. 374, énoncé 57.

Editeur Gauthier-Villars, 1900.

[4] **Jean-Claude CARREGA**

Théorie des corps, la règle et le compas.

Editeur Hermann, 1989.

[5] **A. WARUSFEL, P. ATTALI, M. COLLET, C. GAUTIER, S. NICOLAS** *Arithmétique cours et exercices*. P. 152

Editeur Vuibert, 2002. Ouvrage co-diffusé par l'APMEP sous le n° 925.