BORDEAUX

PREMIER SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 3)

ÉNONCÉ

Partie A

Déterminer tous les entiers naturels x, y, z, tels que $x + y + z = xyz$.

Partie B

Pour n entier naturel non nul donné, on s'intéresse aux entiers naturels x, y, z vérifiant l'équation $x + y + z + n = xyz$.

1- Montrer que les nombres x, y, z sont tous inférieurs ou égaux à $n + 3$.

2- On suppose que $z = n + 3$. Déterminer les valeurs possibles de x et y.

3- Quelle est la plus petite valeur de n pour laquelle on peut trouver des entiers naturels x, y, z strictement inférieurs à $n + 3$, vérifiant $x + y + z + n = xyz$?

SOLUTION

Partie A Il y a, bien sûr, la solution évidente $x = y = z = 0$. Et le fait que l'un des nombres x, y, z soit nul entraîne que les autres le sont aussi. Il semble, immédiatement, que tout autre triplet solution ne pourra se composer que de « petits » naturels ...

On peut, tout d'abord, s'exercer, avec F. Lo Jacomo, sur deux nombres seulement :

« Si x et y sont deux entiers naturels non nuls, soit l'un des deux est égal à 1, auquel cas $x + y > xy$, soit $x = y = 2$, auquel cas $x + y = xy$. Dans tous les autres cas, $x + y < xy$. En effet, l'inégalité $x + y \geqslant xy$ équivaut à : $(x + 1)(y - 1) \leqslant 1$, ce qui, compte tenu que $(x - 1)$ et $(y - 1)$ sont deux entiers naturels, entraîne que soit l'un d'eux est nul, soit les deux sont égaux à 1. »

Passons maintenant aux trois nombres (avec $xyz \neq 0$) :

Méthode 1 : Soit x le plus grand des trois. Alors $xyz \leqslant 3x$, c'est-à-dire : $yz \leqslant 3$.

Etudions alors les différents cas, soit, avec $z \leqslant y$, les cas :

$z = 1, y = 1$ (ce qui impliquerait $2 + x = x$)

$z = 1, y = 2$ (ce qui implique $3 + x = 2x$, d'où...)

$z = 1, y = 3$ (ce qui impliquerait $4 + x = 3x$).

Il n'y a donc qu'une solution non triviale : 1, 2, 3.

Méthode 2 (de Abderrahim Ouardini)
Posons $1 \leqslant z \leqslant y \leqslant x$. D'où (comme ci-dessus) $yz \leqslant 3$.
Remarquons que $yz \neq 1$. (Sinon on aurait $x+y+z = x$) et que, de même, $yz \neq 3$ (Sinon on aurait $y + z = 2x$, c'est-à-dire : $(y - x) + (z - x) = 0$, ce qui exigerait $x = y = z$,, ce qui est impossible). Donc $(z, y) = (1, 2)$ est la seule possibilité qui reste. Et elle donne une solution ...

Méthode 3 (de F. Lo Jacomo)
Si x, y et z sont tous trois au moins égaux à 2, alors $4 \leqslant x+y \leqslant xy$, donc $4 + z \leqslant x + y + z < (x + y)z \leqslant xyz$. D'où $x + y + z < xyz$. L'équation proposée n'a donc pas de solution.
Pour toutes les autres solutions, l'un des trois nombres, par exemple z, est égal à 1. Donc $x + y = xy$ soit $(x - 1)(y - 1) = 2$. D'où, à une permutation près $(x, y, z) = (3, 2, 1)$.

Partie B
Question 1
Méthode 1
On ne peut pas avoir $xyz = 0$ (donc l'un des facteurs nuls) ni $xyz = 1$ (qui donnerait $3 + n = 1$), ni $xy = 1$ (ou $yz = 1$ ou $xz = 1$), (qui donnerait $z + 2 + n = z$).
Comme au plus l'un des trois nombres vaut 1, nous avons $y \geqslant 1$ et $x \geqslant 1$.
$xyz-y = x+z+n$, soit $y(xz-1) = x+z+n$, c'est-à-dire $xz-1 \leqslant x+z+n$, soit $xz + 1 - x - z \leqslant n + 2$, c'est-à-dire $(x - 1)(z - 1) \leqslant n + 2$.
D'où $x \leqslant n + 3, z \leqslant n + 3$ et, de même, $y \leqslant n + 3$.

Méthode 2 (de A. Ouardini)
(A partir de x, y, z non nuls)
$x + y + n = z(xy - 1)$
$x + y + n \geqslant xy - 1$
$n + 2 \geqslant xy - x - y + 1$
$n + 2 \geqslant (x - 1)(y - 1)$, c'est-à-dire $n + 2 \geqslant \text{Max}(x - 1, y - 1)$, ce qui entraîne $n + 2 \geqslant x - 1$ et $n + 2 \geqslant y - 1$. D'où ...

Méthode 3 (de F. Lo Jacomo)
Soiot x le plus grand des trois nombres. L'équation proposée s'écrit : $x(yz - 1) = y + z + n$, c'est-à-dire $x = \dfrac{n}{yz - 1} + \dfrac{y + z}{yz - 1}$.

Comme $yz \geqslant 2$, $\dfrac{n}{yz-1} \leqslant n$ et il suffit que $\dfrac{y+z}{yz-1} \leqslant 3$ pour obtenir la condition souhaitée.

Or $\dfrac{y+z}{yz-1} \leqslant 3$ équivaut à $y+z \leqslant 3(yz-1)$
soit encore à $3(y+z) \leqslant 9(yz-1)$
c'est-à-dire à $(3y-1)(3z-1) \geqslant 10$.

Or l'un des nombres y, z étant au moins égal à 1 et l'autre à 2, les deux facteurs du premier membre sont au moins égaux égaux respectivement à 2 et 5. La condition envisagée est donc vérifiée. Et $x \leqslant n+3$. Donc idem pour y et z.

Question 2

L'équation proposée s'écrit : $x+y+2n+3 = xy(n+3)$

Méthode 1 :

$$xy = \frac{x+y}{n+3} + \frac{2n+3}{n+3}$$

D'après la question précédente, $xy < 4$.
Il n'y a pas d'autre possibilité que, à une permutation près, $(x,y) = (1,2)$.
Et (1, 2) est solution.

Méthode 2 (due à F. Lo Jacomo)
Un calcul analogue à celui de la question 1 donne $z = \dfrac{n}{xy-1} + \dfrac{x+y}{xy-1}$.
On a $z = n+3$ si et seulement si $xy - 1 = 1$
(Sinon $z \leqslant \dfrac{n}{2} + 3$, en utilisant la méthode L.J.C pour la question 2).
Donc $z = n+3$ conduit à la résolution de $xy = 2$.
Etc.

Méthode 3 (due à A. Ouardini)
(qui repart de $xy \geqslant 1$ donc $xy > 2$).
Remplaçons z par $n+3$ dans l'équation proposée :

$$n+3 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2n+3}{xy}$$

qui impose $n+3 \leqslant 1+1+\dfrac{2n+3}{xy}$

soit $\qquad n+3 \leqslant 2+\dfrac{2n+3}{xy}$

c'est-à-dire $n+1 \leqslant \dfrac{2n+3}{xy}$, ou encore $xy \leqslant \dfrac{2n+3}{n+1}$, soit $xy \leqslant 2$.
Comme $xy \geqslant 1$ et $xy \leqslant 2$, il s'ensuit la condition proposée.

Question 3

Méthode 1 Essayons !
Pour $n=1$, aucune solution (En la méthode 2, F.L.J. précise pourquoi).
Pour $n=2$, les essais retiennent deux solutions : $(x,y,z)=(1,3,3)$ et $(x,y,z)=(2,2,2)$.
(Il suffit d'en trouver une).

Méthode 2 (due à F. Lo Jacomo), avec des essais « raisonnés » :
Si $xy=2$, l'expression $z=\dfrac{n}{xy-1}+\dfrac{x+y}{xy-1}$ entraîne $z=n+3$. Il faut donc que $xy>2$, par exemple $xy=3$, auquel cas $z=\dfrac{n+x+y}{2}$. Comme $x+y$ vaut nécessairement 4 si $xy=3$, il suffit que n soit pair pour que l'on ait une telle solution, par exemple $n=2$ fournit le triplet (1, 3, 3) qui convient manifestement.

Mais il faut encore prouver qu'il n'y a pas de telle solution pour $n=1$.
Si $n=1$ et l'un des trois nombres, par exemple x, vaut 1, l'équation s'écrit : $2+y+z=yz$, soit $(y-1)(z-1)=3$, l'un des nombres y ou z vaut $4=n+3$: contradiction. Donc les trois nombres x,y,z doivent être au moins égaux à 2, d'où : $n+x+y \leqslant 1+xy$ et $z \leqslant 1+\dfrac{2}{xy-1}$, mais 2 ne peut pas être divisible par $xy-1$ si x et y sont chacun au moins égaux à 2. Ce qui exclut $n=1$.

Méthode 3 (de A. Ouardini)
Remarquons d'abord que n ne peut pas être égal à 0 (voir la partie A).
Proposons-nous de résoudre l'équation $x+y+z+1=xyz$.
On peut supposer que $1 \leqslant x \leqslant y \leqslant z$, donc $xyz \leqslant 3z+1$ ou encore $xy \leqslant 3+\dfrac{1}{z} \leqslant 4$ et comme $xy \neq 1$, alors $2 \leqslant xy \leqslant 4$, ce qui conduit à $(x,y)=(1,2)$ ou $(x,y)=(1,3)$ ou $(x,y)=(1,4)$ ou $(x,y)=(2,2)$.
Premier cas : $(x,y)=(1,2)$. On a $z+4=2z$, d'où $z=4$.
Deuxième cas : $(x,y)=(1,3)$. C'est impossible vu que $2z=5$.
Troisième cas : $(x,y)=(1,4)$. On a $z+6=4z$, d'où $z=2$. C'est en contradiction avec notre supposition de départ.

Quatrième cas : $(x, y) = (2, 2)$. C'est impossible vu que $3z = 5$.
Conclusion : $(x, y, z) = (1, 2, 4)$ est la seule solution de l'équation proposée, ce qui nous permet de conclure que n ne peut pas être égal à 1.
Remarquons que $(x, y, z) = (2, 2, 2)$ est une solution de l'équation $x + y + z + 2 = xyz$ qui vérifie la condition demandée (*voir plus loin une résolution complète de cette équation*), donc la plus petite valeur de n est 2.

COMMENTAIRES

1. de la cellule académique
« Beaucoup d'élèves ont trouvé les résultats intuitivement et deux ont fait une recherche assez systématique qui est intéressante. »
2. De François Lo Jacomo
L'exercice 1 semble beaucoup plus lourd que l'exercice 2 (N.D.L.R. : cela va se justifier !) et suppose un réflexe, certes classique, mais que les élèves de première n'ont peut-être pas, de faire apparaître des $(kx - 1)(ky - 1)$ chaque fois que l'on doit comparer kxy à $x + y$. Il faut bien voir que la dernière question est double : prouver que $n = 2$ convient, prouver que $n = 1$ ne convient pas, ce qui est totalement différent.
3. De la rédaction de la brochure
La méthode préconisée par F. Lo Jacomo n'a rien d'obligatoire, on l'a vu. Mais il faut bien avouer que, pour dépasser le cadre d'essais immédiats « spontanés », une intense mobilisation neuronale semble bien obligatoire...

COMPLÉMENTS

Cet énoncé, comme le suivant, était dû à Abderrahim OUARDINI qui, outre ses solutions, nous a aimablement communiqué les « prolongements » suivants :

- L'équation de la partie A intervient dans ma démonstration d'une inégalité que j'avais soumise au journal [2] dont l'énoncé est le suivant : « ***Trouver les triangles non rectangles*** ABC ***vérifiant l'inégalité :***

$$\tan\widehat{A}\tan\widehat{B}\tan\widehat{C} > \left[\tan\widehat{A}\right] + \left[\tan\widehat{B}\right] + \left[\tan\widehat{C}\right]$$

où $[t]$ ***désigne la partie entière du réel*** t. »