

BESANÇON

PREMIER SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n°1)

ÉNONCÉ

On se propose de continuer à remplir le tableau ci-dessous avec des entiers naturels en respectant les deux règles suivantes :

				3	4	5			

Règle 1 Chaque ligne contient des entiers naturels consécutifs.

Règle 2 Sur chaque ligne, la somme des carrés des nombres inscrits dans les cases blanches est égale à la somme des carrés des nombres inscrits dans les cases grises.

Remarque : La première ligne a été remplie grâce à l'égalité bien connue : $3^2 + 4^2 = 5^2$.

- 1- Montrer qu'il n'y a pas d'autre façon de remplir la première ligne.
- 2- Remplir les deux lignes suivantes.
- 3- Montrer que si l'on continue à remplir le tableau, en rajoutant autant de lignes que nécessaire, l'une des cases contiendra le nombre 2004. Préciser la couleur et la position exacte de cette case.

SOLUTION 1

1. Notons x la case centrale :

x est naturel et $x \geq 1$ car $x - 1$ est naturel).

Il vient $(x - 1)^2 + x^2 = (x + 1)^2$ soit $x^2 - 4x = 0$ soit $x(x - 4) = 0$.

Comme $x \neq 0$, la seule solution est $x = 4$. Les trois cases sont donc

3	4	5
---	---	---

.

2. On adopte la même méthode pour les deux lignes suivantes :

a) L'équation s'écrit $(x - 2)^2 + (x - 1)^2 + x^2 = (x + 1)^2 + (x + 2)^2$

soit $x(x - 12) = 0$; comme $x \neq 0$, la seule solution est $x = 12$;

Les cinq cases sont donc

10	11	12	13	14
----	----	----	----	----

.

On vérifie bien que $10^2 + 11^2 + 12^2 = 365 = 13^2 + 14^2$.

b) L'équation s'écrit : $(x - 3)^2 + (x - 2)^2 + (x - 1)^2 + x^2 = (x + 1)^2 + (x + 2)^2 + (x + 3)^2$

soit $x(x - 24) = 0$; comme $x \neq 0$, la seule solution est $x = 24$.

Les sept cases sont donc

21	22	23	24	25	26	27
----	----	----	----	----	----	----

.

On vérifie bien que $21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 2030 = 25^2 + 26^2 + 27^2$.

3. Plus généralement la ligne n amènera l'équation $\sum_{i=0}^n (x-i)^2 = \sum_{i=1}^n (x+i)^2$
soit, après simplification et factorisation, $x \left(x - 4 \sum_{i=1}^n i \right) = 0$.

La case centrale sera donc $x = 4 \sum_{i=1}^n i = 2n(n+1) = 2n^2 + 2n$.

Les cases extrêmes seront $x - n = 2n^2 + n$ et $x + n = 2n^2 + 3n$.

Il s'agit donc de savoir s'il existe n tel que $2n^2 + n \leq 2004 \leq 2n^2 + 3n$.

Or $2n^2 < 2n^2 + n < 2n^2 + 3n < 2n^2 + 4n + 2 = 2(n+1)^2$.

n doit donc vérifier (mais ce n'est pas suffisant !) $2n^2 < 2004 < 2(n+1)^2$

soit $n^2 < 1002 < (n+1)^2$ soit $n \leq \sqrt{1002} < n+1$.

Ainsi n s'il existe ne peut être que $E[\sqrt{1002}] = 31$.

Vérifions qu'il convient : pour $n = 31$,

la case extrême à gauche est $2n^2 + n = 1953$

la case centrale est $2n^2 + 2n = 1984$

la case extrême droite est $2n^2 + 3n = 2015$.

Ainsi $1953 < 2004 < 2015$ et comme $2015 - 2004 + 1 = 12$, 2004 est dans la 31^{ème} ligne, dans la 12^{ème} case (grisée) à partir de la droite.

SOLUTION 2 (par André GUILLEMOT, avec calculatrice)

1- Choisissons x comme valeur de la case du milieu, nous avons l'équation $(x-1)^2 + x^2 = (x+1)^2$ qui se réduit à $x^2 - 4x = 0$.

Donc x vaut 0 ou 4. Comme les lignes sont remplies avec des entiers naturels, **il y a une seule solution : $x = 4$.**

Pour remplir la deuxième ligne, on choisit toujours x comme terme du milieu et, plutôt que de résoudre des équations du second degré, on utilise sur sa calculatrice les deux fonctions $Y1 = (X-2)^2 + (X-1)^2 + X^2$ et $Y2 = (X+1)^2 + (X+2)^2$.

On fait défiler la table de valeurs jusqu'à trouver X tel que $Y1 = Y2$.

On trouve facilement que $Y1 = Y2$ pour $X = 12$. **La deuxième ligne sera donc remplie avec les nombres : 10, 11, 12, 13, 14.**

On peut continuer ainsi pour remplir le tableau en ajoutant un terme

supplémentaire à Y1 et Y2 à chaque fois. Une autre façon, plus simple, va utiliser la possibilité de travailler sur les listes de nombres qu'offre la calculatrice.

Pour la ligne N, on définit Y1 comme la somme des carrés des nombres variant de $X - N$ à X et Y2 comme la somme des carrés des nombres variant de $X + 1$ à $X + N$. On aura donc $Y1 = \text{sum}(\text{seq}(A^2, A, X-N, X))$ et $Y2 = \text{sum}(\text{seq}(A^2, A, X+1, X+N))$.

Pour trouver la ligne 3, on commence par mettre 3 dans la variable N, puis on fait défiler la table jusqu'à trouver X tel que $Y1 = Y2$. Cette égalité est réalisée pour $X = 24$.

La troisième ligne sera donc : 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27.

3. En remplaçant N par 4, 5, 6, ... on peut remplir les lignes suivantes et on peut espérer, au bout d'un certain temps, atteindre le nombre 2004. Mais examinons plutôt la colonne des termes du milieu. Nous obtenons la suite $(U_n) = \{4, 12, 24, 40, 60, 84, \dots\}$. Remarquons que la différence entre deux termes consécutifs 8, 12, 16, 20, 24 se comporte comme une suite arithmétique (V_n) de premier terme 8 et de raison 4.

On va exploiter cette conjecture pour trouver un éventuel terme de (U_n) proche de 2004 qui nous permette de remplir une ligne du tableau où apparaîtrait le nombre 2004.

Pour cela, on utilise la touche **ANS** qui est très pratique pour étudier les suites récurrentes et on mettra en parallèle, dans la même liste, trois suites (U_n) , (V_n) et un compteur C.

$$(U_{n+1} = U_n + V_n; V_{n+1} = V_n + 4; C_{n+1} = C_n + 1.$$

On entre les éléments initiaux $\{4, 8, 1\}$ et on appuie sur la touche

ENTER. On entre les formules de récurrence en utilisant la commande

ANS : $\{\text{Ans}(1) + \text{Ans}(2), \text{Ans}(2) + 4, \text{Ans}(3) + 1\}$.

On appuie sur **ENTER** un certain nombre de fois, dans l'espoir de voir afficher un nombre proche de 2004. On obtient alors la ligne :

$\{1984, 128, 31\}$.

Donc, d'après la calculatrice, sur la base de notre conjecture, 1984 apparaîtrait au milieu de la ligne 31. Vérifions à l'aide des fonctions Y1 et Y2 que 1984 convient bien.

On commence par entrer 31 dans la variable N, on demande Y1(1984) et Y2(1984) et on obtient deux fois le nombre : 124 002 480.

Nous pouvons donc conclure que 2004 apparaît dans la ligne

31, dans la partie grisée, à la place 20 à partir de la gauche.

Remarques : On aurait pu choisir comme inconnue x le premier terme de chaque ligne et on serait arrivé aussi facilement au résultat.

On peut aussi remarquer qu'il n'y a qu'une seule façon de remplir chaque ligne avec des entiers naturels car 0 est toujours solution des équations dans $\mathbb{R}$.

COMMENTAIRES PAR L'ÉQUIPE ACADÉMIQUE

Les **questions 1 et 2** pouvaient être traitées par un élève de première comme dans le corrigé académique (solution 1). On a trouvé plusieurs fois cette solution avec l'astuce classique consistant à appeler x la case centrale.

En appelant x la case la plus à gauche, ce qui semble naturel *a priori* (et beaucoup d'élèves ont réussi ainsi), les équations sont à peine plus compliquées et nécessitent l'utilisation du discriminant $\Delta \dots$ à moins de remarquer qu'en ligne n , $-n$ est une solution évidente qui, bien que non recevable, permet une factorisation par $(x + n)$.

Pour la question 3, la solution développée dans le corrigé, hors la notation $\sum$ dont on peut se passer, nécessite la connaissance des suites arithmétiques. Une élève qui a réussi à faire cette question par des moyens empiriques a regretté de n'avoir pas encore vu en cours les suites, ce qui, selon elle, aurait pu simplifier sa solution (certes ! ... et la justifier).

Les élèves ont fait preuve de beaucoup d'esprit d'observation et d'extrapolation, en observant soit les cases centrales (suite 4-12-24-...) soit les cases les plus à gauche (suite 3-10-21-...) ou les plus à droite (suite 5-14-27-...). De bons tests de QI en perspective !

Notons, pour les initiés, que les suites en question étant polynomiales du second degré, donc linéaires récurrentes d'ordre 2, les différences successives sont arithmétiques. C'est ceci qui a permis aux élèves d'extrapoler...

Ainsi un élève a observé que la case la plus à gauche est le produit du numéro de la ligne et du nombre d'éléments de la ligne ($2n^2 + n = n(2n+1)$). D'autres ont vu que la case centrale est $2n(1 + 2 + \dots + n)$.

Beaucoup ont cherché à observer le procédé de passage d'une ligne à l'autre (réurrence) et ont réitéré (avec bien du courage !...) le procédé