

AMIENS

PREMIER SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 3)

ÉNONCÉ

On considère deux entiers $a > 0, b > 0$ et la suite arithmétique de terme général $u_n = a.n + b^2$.

Démontrer qu'il existe parmi les termes de cette suite une infinité de carrés parfaits.

SOLUTION 1

Une idée-clé est, en prenant appui sur b^2 , de transformer $a.n + b^2$ en $(x + b)^2$, ce qui revient à aménager $a.n$ pour y retrouver $x^2 + 2bx$.

Dès lors :

considérons la suite extraite définie par $u_{\phi(k)}$ avec $\phi(k) = ak^2 + 2bk$
 $u_{\phi(k)} = a(ak^2 + 2bk) + b^2 = (ak + b)^2$.

Tous les termes de cette suite extraite sont des carrés parfaits, donc la suite (u_n) contient une infinité de carrés parfaits.

SOLUTION 2 de F. LO JACOMO

Pour qu'un carré parfait x^2 s'écrive, pour un certain n sous la forme $an + b^2$, il faut et il suffit que $x^2 - b^2 = (x + b)(x - b)$ soit divisible par a . Il suffit donc que $x - b$ soit divisible par a (ou que $x + b$ soit divisible par a), donc que $x = ak + b$ (ou $x = ak - b$), ce qui donne une infinité de carrés parfaits $a(ak^2 + 2bk) + b^2$ et $a(ak^2 - b^2) + b^2$ parmi les termes de la suite arithmétique $u_n = an + b^2$, mais il peut en exister bien davantage.

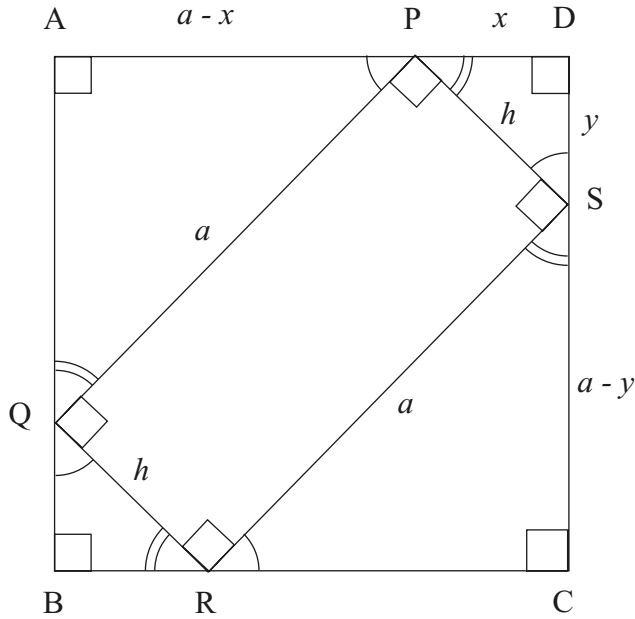
DEUXIÈME SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 4)

ÉNONCÉ

exercice 4 : un objet a la forme d'un parallélépipède rectangle de base carrée de côté $a = 68$ cm et de hauteur inconnue. Il est vendu conditionné dans une boîte cubique de côté $a = 68$ cm dont il épouse la forme. Alors qu'on l'insère dans la boîte l'objet reste coincé en position inclinée, la boîte ferme quand même ; l'arête supérieure affleurant juste le couvercle. Quelle hauteur peut avoir l'objet ?

SOLUTION 1

La "vue de face" d'une perspective cavalière de la figure nous permet d'écrire les relations suivantes :



Les triangles APQ et DSP sont semblables car ils sont rectangles et $\widehat{APQ} = \widehat{DSP}$. Il en résulte les relations

$$\frac{AP}{DS} = \frac{PQ}{PS} = \frac{AQ}{DP}$$

$$\frac{a-x}{y} = \frac{a}{h} = \frac{a-y}{x}$$

$$ah - hx = ay \quad (1) \text{ et } ax = ah - hy \quad (2)$$

(1) + (2) : $ah - hx + ax = ay + ah - hy$ soit $(a-h)x = (a-h)y$. Comme $a \neq yh$, cela entraîne $x = y$.

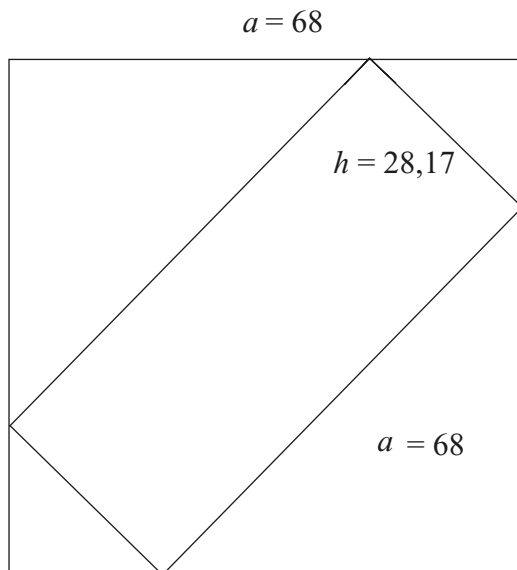
Par ailleurs, par application du théorème de Pythagore au triangle PDS, $h^2 = x^2 + y^2 = 2x^2$ d'où $h = x\sqrt{2}$.

$$\text{En reportant dans (1), } ax\sqrt{2} - x^2\sqrt{2} = ax.$$

$$\text{Or } x \neq 0 \text{ donc } a\sqrt{2} - x\sqrt{2} = a.$$

$$h = x\sqrt{2} = a(\sqrt{2} - 1).$$

$$\text{Pour } a = 68 \text{ cm, } h \approx 28,17 \text{ cm} \approx 28,2 \text{ cm.}$$

SOLUTION 2 de F. LO JACOMO

Dans le plan perpendiculaire aux arêtes de contact, la figure fait apparaître deux triangles rectangles, l'un d'hypoténuse a , de côtés b et c , l'autre d'hypoténuse h (hauteur inconnue du parallélépipède), de côtés $a - b$ et $a - c$. On a donc :

- (1) $a^2 = b^2 + c^2$ et
- (2) $h^2 = (a - b)^2 + (a - c)^2 = 3a^2 - 2a(b + c)$ compte tenu de la première relation. Or
- (3) $(b + c)^2 = b^2 + c^2 + 2bc > a^2$ prouve que $b + c > a$, et
- (4) $(b + c)^2 + (b - c)^2 = 2a^2$ prouve que $b + c \leq a\sqrt{2}$.

Mais $b + c$ peut prendre n'importe quelle valeur comprise entre $a = 68$ cm et $a\sqrt{2} = 96,1665\dots$ cm : quel que soit t vérifiant $a < t \leq a\sqrt{2}$, pour avoir $b + c = t$, il faut et il suffit, d'après (4), que $|b - c| = \sqrt{2a^2 - t^2}$, soit $b = \frac{t + \sqrt{2a^2 - t^2}}{2}$ et $c = \frac{t - \sqrt{2a^2 - t^2}}{2}$ ou inversement, et l'on a d'après (2) : $h^2 = 3a^2 - 2at$.

h^2 peut donc prendre n'importe quelle valeur vérifiant : $a^2 > h^2 \geq (3 - 2\sqrt{2})a^2$, cette borne inférieure étant atteinte lorsque $b - c = 0$, soit $b = c = \frac{a}{\sqrt{2}}$ et $h = \sqrt{2}(a - b) = (\sqrt{2} - 1)a$. On a bien : $(\sqrt{2} - 1)^2 = 3 - 2\sqrt{2}$. L'objet peut avoir n'importe quelle hauteur h vérifiant :

$$28,1665\dots\text{cm} = (\sqrt{2} - 1)a \leq h < a = 68 \text{ cm}.$$

COMMENTAIRE ACADÉMIQUE

Le premier exercice académique, généralisation d'un exercice du «Ter-racher » de Première S, a été abordé par moins d'une dizaine d'élèves (sur 85).

Les élèves qui ont abordé *le deuxième exercice* ont tous considéré comme évident que l'objet et la boîte devaient avoir un axe de symétrie en commun.

COMMENTAIRE « BROCHURE »

Ce sont deux jolis exercices qui, tous deux, exigent d'abord une finesse d'analyse de la situation ...

Tout à fait, à notre avis, du style souhaitable pour ces Olympiades... et pour une rénovation de nos enseignements.

STATISTIQUES

Le nombre des établissements participants s'est étoffé, 16 lycées en 2004 pour 11 en 2003.

Le nombre de candidats a diminué : 113 au lieu de 266.

Le nombre de participants effectifs est de 85 (75%), ce qui est satisfaisant, tous de Première S, SI ou SVT. Cela va de 1 candidat pour un lycée à 16 pour tel autre.

Il semble que les collègues ont effectué une première sélection avant de proposer des candidats.

Trois élèves ont été primés :

1^{re} Alban DENICOURT, lycée Jean-Calvin - NOYON

(lycée qui présentait 10 candidats)

2^{me} Carl HOSSLER

3^{me} Xavier BRUNEL

(tous deux du lycée Gérard de Nerval - SOISSONS - qui présentait 3 candidats).