

donc la fonction constante f définie par $f(M) = \frac{1}{4}$ est la seule vérifiant la condition donnée.

VARIANTE de F. LO JACOMO, pour la question 2)a)

2)a) Le cercle (C_1) de centre M passant par N et le cercle (C_2) de centre N passant par M se coupent en P et Q . Le cercle de centre P passant par M et N recoupe (C_1) et (C_2) en P_1 et P_2 , et le cercle de centre Q passant par M et N recoupe (C_1) et (C_2) en Q_1 et Q_2 . MP_2 et NP_1 se coupent en A , MQ_2 et NQ_1 se coupent en B : A et B sont les deux points cherchés. En effet, ces quatre cercles ont même rayon $R = MN$, la médiatrice de $[PN]$ passant par M et P_2 , la médiatrice de $[PM]$ passe par N et P_1 , donc A est le centre du triangle MNP et, pour la même raison, B est le centre du triangle équilatéral MNQ , $MA = NA = MB = NB$ et l'angle $\widehat{AMB}$ vaut deux fois l'angle $\widehat{AMN}$, soit 60° .

PLUS GÉNÉRALEMENT,

Abderrahim OUARDINI a publié, dans son ouvrage «*Mathématiques de compétition, 112 problèmes corrigés*», Ed. Ellipses, le problème n° 46, suivant :

Problème On désigne par E l'espace affine euclidien de dimension 3. Déterminer toutes les applications ψ définies sur E , à valeurs dans $\mathbb{R}$, vérifiant la propriété suivante :

Pour tout tétraèdre régulier $(ABCD)$ de E , on a :

$$\psi(A) + \psi(B) + \psi(C) + \psi(D) = 1.$$

DEUXIÈME SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 3)

ÉNONCÉ

On s'intéresse aux suites $x_1, x_2, \dots, x_9$ de neuf entiers naturels vérifiant :

$$0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < x_6 < x_7 < x_8 < x_9$$

$$\text{et } x_1 + x_2 + \dots + x_9 = 53 \quad (\text{conditions (C)})$$

$x_1, x_2, \dots, x_9$ sont appelés **termes** de la suite.

1) Donner deux exemples de telles suites.

Cas général : On considère dans les questions suivantes une suite $x_1, x_2, \dots, x_9$ de neuf nombres entiers naturels vérifiant les conditions (C).

2) a) Prouver que cette suite ne peut pas comporter un nombre impair de termes pairs.

b) Démontrer que cette suite comporte au moins quatre termes pairs.

3) Prouver qu'au moins un des termes de cette suite est un multiple de 3

4) Prouver que le produit des termes de cette suite est divisible par 96.

SOLUTION

1) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 17 et 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 16 sont de telles suites.

2) a) La somme d'un nombre pair de nombres impairs est paire. En effet, en groupant ces termes par deux, on obtient un certain nombre de groupes de deux nombres. La somme dans chaque groupe est paire et par conséquent la somme des sommes dans chaque groupe, autrement dit la somme de tous les nombres, est paire.

Supposons maintenant que la suite comporte un nombre impair de termes pairs. Comme en tout il y a 9 termes, il reste alors un nombre pair de termes impairs dont la somme est paire, d'après ce qui précède. Comme la somme de termes pairs est paire, on déduit que la somme de tous les termes de la suite est paire, ce qui est faux car cette somme vaut 53.

b) D'après ce qui précède, moins de 4 termes pairs signifie aucun ou 2 nombres pairs. Or les plus petits termes d'une suite de 9 nombres avec aucun terme pair sont 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17. Comme cela dépasse largement 53, il n'existe pas de suite de 9 nombres naturels non nuls avec aucun nombre pair.

Si la suite comportait exactement deux nombres pairs, les plus petits termes seraient 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 13, la somme serait alors 55, ce qui dépasse encore 53. Donc il n'existe pas non plus de suite de 9 nombres avec 2 termes pairs. Donc la suite admet au moins 4 termes pairs.

3) Si la suite ne comportait aucun multiple de 3, la suite dont la somme des termes est minimum est 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13. Cette somme minimum est alors 61, ce qui dépasse 53. Par conséquent, la suite admet au moins un multiple de 3.

4) On a $96 = 3 \times 2^5$. Comme au moins un des termes est divisible par 3, le produit des termes est aussi divisible par 3.

On a vu qu'il y a au moins 4 termes pairs. S'il y a plus de 4 termes pairs, il y a en fait plus de 5 termes pairs, le produit de ces termes pairs est alors divisible par 2^5 .

Si la suite comporte exactement 4 nombres pairs, un au moins de ces termes est divisible par $4 = 2^2$. En effet, dans le cas contraire, les plus petits termes d'une telle suite seraient 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 14, ce qui donne une somme égale à 57 qui dépasse 53.

Le produit des termes pairs est alors divisible par $2 \times 2 \times 2 \times 4 = 2^5$ et donc le produit de tous les termes est encore divisible par 2^5 .

Le produit des termes est donc toujours divisible par 2^5 , et comme il est aussi divisible par 3, on déduit qu'il est divisible par $3 \times 2^5 = 96$.

François LO JACOMO précise, pour le 1) :

Avec les plus petits nombres possibles, on obtient la suite dont la somme des termes est $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9$ égale à 45. Il suffit, dès lors, de majorer le dernier terme de 8 ou de répartir la majoration de 8 sur plusieurs termes, étant entendu qu'une majoration de a du terme de rang n entraîne une majoration au moins égale de chacun des termes de rang supérieur...

COMPTE RENDU GÉNÉRAL,

par Nicolas Lichiardopol, coordonnateur de la cellule académique.

Les olympiades de cette année ont réuni 121 participants, soit 13 élèves de plus que l'année précédente. Il y eut quand même 40 absents le jour de l'épreuve.

Les quatre sujets ont été traités inégalement par les élèves.

Ainsi la première question de l'exercice n° 1, proposé par l'Inspection Générale, a eu un très bon taux de réussite (à peu près 60%). A peu près 40% des élèves ont réussi la deuxième question. Six élèves ont vraiment bien réussi la troisième question, beaucoup ont donné la condition sans vraiment la justifier. Le sujet, assez scolaire, a inspiré les élèves, même si les calculs n'étaient pas toujours très rigoureux.

Le deuxième exercice proposé par l'académie, ici en numéro 4, a été beaucoup moins réussi. Ainsi la question 1) a été réussie par à peu près 20% des élèves. Beaucoup de réponses fantaisistes ont été notées du

genre $f(x) = \sin \frac{x}{\pi}$, $f(x) = x + 1$ etc. Enfin on se rend compte que beaucoup d'élèves n'ont pas bien saisi la notion de fonction, ils conçoivent $f(3)$, $f(\pi)$, autrement dit l'image d'un réel, mais ont du mal à concevoir l'image d'un point. Pourtant, ils connaissent les transformations (surtout les élèves de première S).

La question 2.a, qui était un problème de construction assez facile, a eu à peu près le même taux de réussite. Beaucoup d'élèves ont alors placé les points A et B et ont construit ensuite les points M et N , alors qu'il fallait faire exactement le contraire. On a noté cependant quelques constructions assez jolies mais pas assez justifiées.

La question 2.b a été assez bien réussie (la moitié des élèves à peu près). Personne n'a vraiment répondu à la question 3. Les élèves n'ont pas déduit de la question 2.b que f était une fonction constante.

Personne n'a traité non plus la question 4.

L'exercice admet une jolie généralisation, à savoir : Pour $n \geq 3$, la seule application du plan dans $\mathbb{C}$ telle que pour tous les points $A_1, A_2, \dots, A_n$, sommets d'un polygone régulier on ait $f(A_1) + \dots + f(A_n) = 1$, est $f : M \mapsto \frac{1}{n}$. On s'est aperçu par la suite que c'est à peu près le sujet d'un exercice proposé par la Roumanie aux O.I.M. (il figure dans Hypermath de P. Bornshtein).

L'exercice 3, sujet académique, ici en n°2, a été le mieux réussi, contrairement à notre attente.

Plus de 60% des élèves ont réussi la question 1, c'est vrai que les explications étaient souvent longues, mais justes quand même.

La question 2.b a été réussie par à peu près 30% des élèves, ils ont bien utilisé le résultat de la première question.

La question a été réussie dans les mêmes proportions.

Huit élèves ont traité correctement la question 4. Beaucoup ont compris qu'il faut utiliser la factorisation $96 = 2^5 \times 3$. Cet exercice a manifestement plu, ce qui ne peut que réjouir les amateurs de théorie des nombres. La source d'inspiration de cet exercice est un problème de concours posé en Roumanie (Concours GH Titeica).

Le quatrième sujet, national a été moyennement réussi. La plupart des élèves ont donné la bonne valeur maximale, seulement 12 élèves ont déterminé la valeur minimale.

La question 2 a été réussie par 8 élèves.

Trois élèves ont correctement traité la question 3.

Il y a eu des initiatives pour cet exercice, mais la plupart du temps elles n'ont pas abouti.

On déplore la faible participation des classes technologiques, trois élèves seulement.

ANNEXES

1- 16 élèves ont été primés, dont 4 du lycée Thiers, Marseille, 3 du lycée privé Lacordaire, Marseille, 2 du lycée Th. Aubanel, Avignon, 2 du lycée Michelet, Marseille et 2 du lycée Val de Durance, Pertuis.

Voici les trois premiers primés :

- 1 PERRIER Laëtitia (1ère S) - Lycée Th. Aubanel, Avignon
- 2 REGNIER Maxime (1ère S) - Lycée privé Saint Louis, Orange
- 3 BUET Blanche (1ère S) - Lycée Val de Durance, Pertuis.

2- Statistiques académiques

Classe	présentés			primés		
	filles	garçons	total	filles	garçons	total
1ère S	36	82	118	5	11	16
1ère STI	0	1	1	0	0	0
1ère STL						
1ère STT	1	1	2	0	0	0
1ère SMS						
TOTAL	37	84	121	5	11	16

COMMENTAIRES DES RÉDACTEURS DE LA BROCHURE

Relativement simples, progressifs, équilibrés, les exercices académiques semblent intéressants et bien construits.

La dernière question du deuxième exercice soulève la suivante : quelles connaissances d'arithmétique les élèves de première sont-ils censés avoir ?