

AIX-MARSEILLE

PREMIER SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 2)

ÉNONCÉ

Dans les trois premières questions, on considère les fonctions f définies sur le plan, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et vérifiant la propriété (P) suivante : Pour tout triangle équilatéral ABC , on a $f(A) + f(B) + f(C) = 1$.

1) Donner un exemple d'une telle fonction.

2) M et N sont deux points distincts.

a) Construire à la règle et au compas deux points A et B tels que les triangles MAB et NAB soient équilatéraux. Expliquer la construction.

b) Prouver que pour une fonction f vérifiant la propriété (P), on a $f(M) = f(N)$.

3) Déterminer toutes les fonctions f vérifiant la propriété (P).

4) Déterminer toutes les fonctions f définies sur le plan, à valeurs dans $\mathbb{R}$, telles que pour tout losange $ABCD$, on ait :

$$f(A) + f(B) + f(C) + f(D) = 1.$$

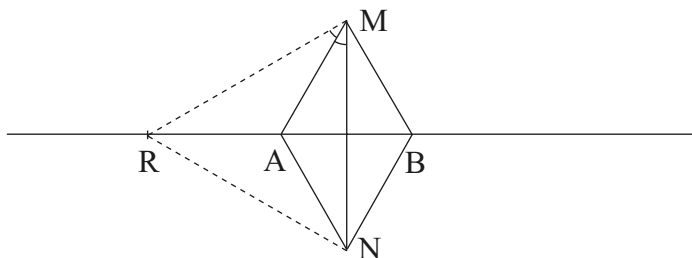
SOLUTION

1) La fonction constante définie pour tout point M par $f(M) = \frac{1}{3}$ est un tel exemple.

2) a) Pour une telle configuration, on a $AM = BM = AB = AN = BN$. Les points A et B sont donc équidistants de M et N , par conséquent A et B se trouvent sur la médiatrice du segment $[MN]$.

Par ailleurs, le triangle AMN est isocèle en A et, comme $\widehat{MAN} = \widehat{MAB} + \widehat{BAN} = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$, on déduit $\widehat{AMN} = \frac{180 - 120}{2} = 30^\circ$, la moitié d'un angle de 60° . De là, la construction des points A et B est claire :

On construit d'abord la droite d médiatrice de $[MN]$. On construit ensuite un point intermédiaire R tel que le triangle MNR soit équilatéral. On construit la bissectrice de l'angle $\widehat{RMN}$. Un des deux points cherchés, par exemple A , sera l'intersection de cette bissectrice avec la droite d . On finit par construire (avec le compas) le point B sur d , de l'autre côté de (MN) , tel que $AB = AM$.

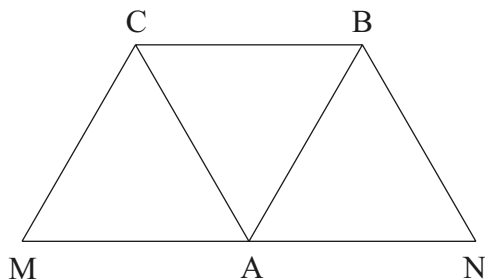


b) Si f est une fonction vérifiant la propriété (P), les triangles MAB et NAB étant équilatéraux, on a $f(M) + f(A) + f(B) = 1$ et $f(N) + f(A) + f(B) = 1$. Par soustraction on obtient $f(M) - f(N) = 0$, soit $f(M) = f(N)$.

3) Pour tous points M et N , on a $f(M) = f(N)$ (cela veut dire que f est une fonction constante).

Dans le triangle équilatéral MAB , on a $f(M) = f(A) = f(B)$ et $f(M) + f(A) + f(B) = 1$ qui devient $3f(M) = 1$, d'où $f(M) = \frac{1}{3}$.

4) Soit f une telle fonction. Soient M et N deux points distincts, A le



milieu de $[MN]$ et B et C les points tels que les triangles CAM et ABC soient équilatéraux (voir figure).

Il est facile de prouver que $MABC$ et $NBCA$ sont des losanges et, par conséquent :

$f(M) + f(A) + f(B) + f(C) = 1$ et $f(N) + f(B) + f(C) + f(A) = 1$ et, par soustraction, on obtient $f(M) - f(N) = 0$, soit $f(M) = f(N)$. Ceci étant valable pour tous points M et N , on a $f(M) = f(A) = f(B) = f(C)$ et l'égalité $f(M) + f(A) + f(B) + f(C) = 1$ devient $4f(M) = 1$, d'où $f(M) = \frac{1}{4}$.

Il est aisé de voir que la fonction ainsi définie vérifie la condition requise,