

Solutions 1 et 2

M. Pierre BORNSZTEIN qui, dit-il, « a eu l'honneur de proposer ce sujet » nous a adressé « l'énoncé original, qui diffère quelque peu de l'énoncé retenu. En particulier – précise-t-il – une question intermédiaire a été rajoutée (le cas du pentagone), parce qu'il nous a semblé que c'était un point d'appui avant d'aborder le polygone à 2003 sommets. »

Voici la (ou les) solution(s) de M. Pierre BORNSZTEIN concernant le 1° et le 3° (qui couvre, évidemment, le 2°) :

1.a) Avec les notations de la figure ci-contre, on a :

$$2\alpha + \beta + \delta = \pi \text{ et } \beta + 2\gamma + \delta = \pi$$

d'où $\alpha = \gamma$, et ainsi les triangles ABC et ADC sont respectivement isocèles en B et D. Donc $AB = BC$ et $AD = DC$. (1)

On prouve de la même façon que les triangles ADB et CDB sont respectivement isocèles en A et C. Et donc que $AB = AD$ et $BC = DC$ (2).

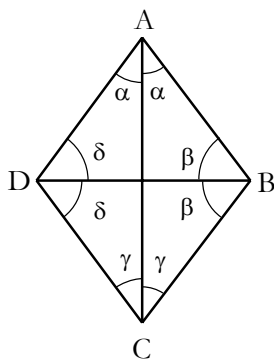


figure 1

De (1) et (2), on déduit que $AB = BC = CD = DA$, et donc que ABCD est un losange.

b) Il est facile de vérifier qu'en fait tout losange vérifie les conditions de l'énoncé. Il suffit donc de choisir un losange qui ne soit pas un carré pour exhiber un contre-exemple.

3) Première solution

Pour tout i , on pose :

$$\widehat{A_{i-1}A_iA_{i+1}} = 2001a_i.$$

Soient A, B, C et D quatre sommets consécutifs du polygone. Les angles intérieurs de ces sommets sont égaux respectivement à 2001α , 2001β , 2001γ et 2001δ .

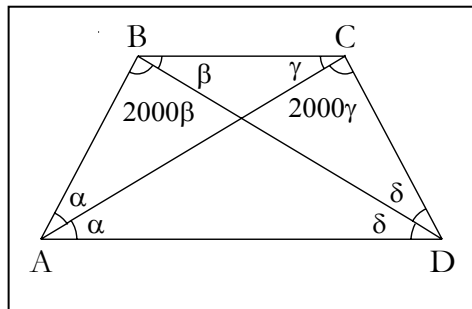


figure 2

Avec les notation de la figure 2, on a donc :

$$\alpha + 2001\beta + \gamma = \pi \text{ et } \alpha + 2000\gamma + 2\delta = \pi.$$

On en déduit que : $2001\beta = 1999\gamma + 2\delta$.

Ceci étant vrai pour quatre sommets consécutifs quelconques, on peut donc affirmer que, pour tout i :

$$2001a_i = 1999a_{i+1} + 2a_{i+2} \text{ avec } a_{2004} = a_1 \text{ et } a_{2005} = a_2.$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que a_1 est le plus grand de tous les a_i .

$$\text{Mais alors : } 2001a_1 = 1999a_2 + 2a_3 \leq 1999a_1 + 2a_1 = 2001a_1.$$

$$\text{Donc } a_1 = a_2 = a_3.$$

Puisque a_2 est donc également le plus grand des a_i , on peut reprendre le même raisonnement et prouver ainsi que : $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$.

Et donc, de proche en proche (soit par récurrence, soit en répétant le raisonnement jusqu'à a_{2001}), on prouve que $a_1 = a_2 = \dots = a_{2003}$.

Par suite, le polygone a tous ses angles égaux. (3)

Reprenons les notations initiales, pour les sommets A, B, C et D consécutifs. De (3), on déduit que le triangle ABC est isocèle en B, et donc que $AB = BC$.

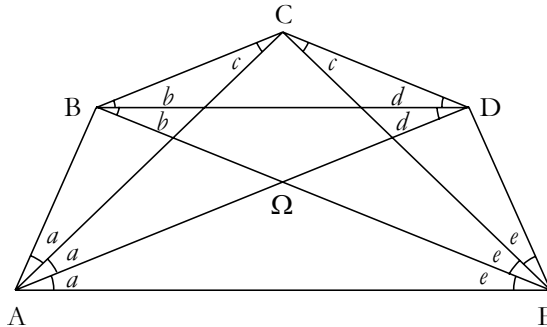
Comme il s'agit de quatre sommets consécutifs quelconques, le sommet B est arbitraire, ce qui permet d'affirmer que le polygone a tous ses côtés de même longueur. (4)

De (3) et (4), on déduit que le polygone est régulier.

Deuxième solution

Soient A, B, C, D et E cinq sommets consécutifs du polygone. Les angles intérieurs en ces sommets sont égaux respectivement à $2001a$, $2001b$, $2001c$, $2001d$ et $2001e$.

Soit Ω le point d'intersection des diagonales [AD] et [BE].



Par hypothèse, on a : $\widehat{\Omega DB} = \widehat{ADB} = d = \widehat{BDC}$.

et, de même $\widehat{\Omega BD} = \widehat{EBD} = b = \widehat{DBC}$.

Donc les triangles $D\Omega B$ et DCB sont semblables.

Par suite : $\widehat{BCD} = \widehat{B\Omega D} = \widehat{A\Omega E}$.

En considérant la somme des angles dans les triangles ACE et ΩAE , on déduit que : $1999c + 2e + 2a = \pi = 2001c + e + a$.

Et donc : $2c - e - a = 0$, et alors $2003c = \pi$, d'où $c = \frac{\pi}{2003}$.

Ceci étant vrai pour cinq sommets consécutifs quelconques, on en déduit que le polygone a tous ses angles égaux. (3')

De plus, avec les notations précédentes, de (3') il découle que le triangle BCD est isocèle en C, ce qui assure que $BC = CD$.

Là encore, s'agissant de sommets consécutifs arbitraires du polygone, on en déduit que le polygone a tous ses côtés de même longueur. (4')

D'après (3') et (4'), on peut affirmer que le polygone est régulier.

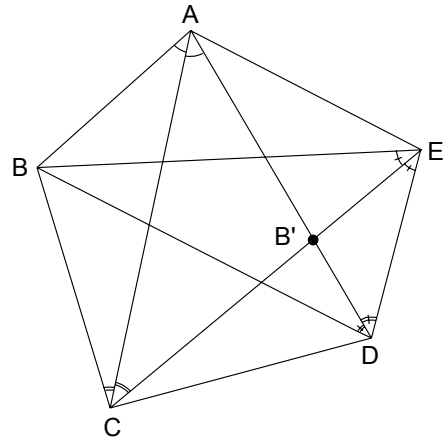
Solution 3

Concerne la question 2 (le pentagone) mais la méthode est extensible à la question 3.

Solution d'un candidat (transmise par Pierre BORNSZTEIN et quelque peu réécrite)

• (AC) étant axe de symétrie de (AB) et (AD) d'une part, de (CB) et (CE) d'autre part, B' est le symétrique de B par rapport à (AC).

• Or B' est le point de concours des bissectrices intérieures, pour $\widehat{BED}$ et $\widehat{BDE}$ du triangle BED. (BB') est donc la troisième bissectrice intérieure, celle de $\widehat{ABC}$ et, du fait de la symétrie par rapport à (AC), elle l'est aussi de $\widehat{AB'C}$. Par suite, ABCB' est un quadrilatère convexe qui vérifie les hypothèses de 1) et donc $AB = BC$ et $\widehat{BAC} = \widehat{BCA}$ d'où $\widehat{A} = \widehat{C}$.



« figure-schéma » (qui évite de considérer la conclusion comme acquise).

On raisonne alors de même sur les autres sommets pour conclure.

Remarque de Pierre Bornsztein :

Ce raisonnement reste valable pour un n -gone convexe, dès que $n \geq 5$, en travaillant sur 5 sommets consécutifs.

Autres solutions

QUESTION 1: La méthode qui intervient au début de la « solution 3 » est utilisable : les hypothèses munissent ABCD de deux axes de symétrie qui sont

donc chacun médiatrice de la diagonale portée par l'autre : ABCD est un losange.

QUESTION 2 : Des candidats ont utilisé un système de 5 équations à 5 inconnues.

Solution proposée par F. Lo Jacomo

La question n'est posée que pour un polygone de 5 côtés, et de 2003 côtés, soit dans les deux cas un nombre impair de côtés. On peut donc utiliser la méthode que voici : dans la figure 2, première solution, appelons Ω l'intersection de (AC) et (BD). L'angle $\widehat{B\Omega A}$ vaut $\beta + \gamma = \alpha + \delta$. On en déduit que : $\alpha - \gamma = \beta - \delta$, et plus généralement, en posant $\varepsilon = a_1 - a_3$, $\varepsilon = a_1 - a_3 = a_2 - a_4 = a_3 - a_5 = \dots = a_{2002} - a_1 = a_{2003} - a_2$. Donc $2003 \varepsilon = (a_1 - a_3) + (a_2 - a_4) + \dots + (a_{2002} - a_1) + (a_{2003} - a_2) = 0$. Il en résulte que $a_1 = a_3 = \dots = a_{2003} = a_2 = a_4 = \dots = a_{2002}$. Les angles étant tous égaux, quatre sommets consécutifs sont cocycliques (sur la figure 2, B et C voient [AD] sous le même angle), donc le polygone est inscriptible et des angles inscrits égaux interceptent des cordes égales. Mais cette méthode ne s'applique pas si le polygone a un nombre pair de côtés, étant donné l'exception que constitue le losange de la première question.

Commentaires

de Pierre BORNSZTEIN :

« Très peu de candidats ont réussi à obtenir des résultats significatifs sur cet exercice. Sur quelque 30 copies que j'ai corrigées, seule une contenait une démonstration dans le cas du pentagone [cf. « solution 3 »]. »

de la rédaction de la brochure :

Cet exercice met en valeur, de façon intéressante, deux principes-clés. L'un à propos de recherches sur « de grands nombres » : étudier d'abord si possible, des cas analogues sur des « petits nombres ». Ici la recherche relative au « 2003-gone » se nourrit de recherches sur les « 4-gone » et les « 5-gone ». Autre principe-clé : savoir, dans une figure, détecter les sous-figures aux propriétés intéressantes. Ainsi, dans la « solution 3 », utilise-t-on deux « sous-figures » : le triangle BED et le quadrilatère ABCB'.

De même pour le « 2003-gone », les solutions de P. BORNSZTEIN utilisent-elles respectivement une sous-figure ABCD et une sous-figure ABCDE.

Cela étant, on savoure les imbrications brillamment utilisées par BORNSZTEIN ou l'élève cité, des propriétés issues des sous-figures.

Déroulement de l'épreuve, palmarès

- 894 inscrits
 - 623 présents (pour 2003, excellent rapport « présents/inscrits » !) dont 619 élèves de 1^{ère} S (412 garçons, 207 filles) et 4 élèves de STI (3 garçons, une fille).
 - 21 lauréats : 9 « prix » et 12 « accessits ».
 - eu égard au grand nombre de présents, nous dérogeons à notre règle pour aller jusqu'à citer les 9 prix :
- | | | |
|---------------------|-----------------------|--------------------|
| 1 : Vincent JUGÉ | Lycée Richelieu | Rueil Malmaison |
| 2 : Raphaël BARROIS | Lycée Saint Erembert | St Germain en Laye |
| 3 : Camille CORON | Lycée Lakanal | Sceaux |
| 4 : Thomas CHAUMENY | Lycée Descartes | Antony |
| 5 : Eric HONG | Lycée Gustave Monod | Enghien les Bains |
| 6 : Violaine AUGER | Lycée Saint Erembert | St Germain en laye |
| 7 : Andréa RODIEN | Lycée Franco-Allemand | Buc |
| 8 : Bruno MEIGNIEN | Lycée Hoche | Versailles |
| 9 : Yolande CAMUS | Lycée Franco-Allemand | Buc |

A noter que « les accessits n'ont pas été classés, attendu que les copies se sont distinguées pour les résultats obtenus, mais aussi pour la qualité de la rédaction, pour un exercice particulièrement bien réussi, ou pour quelques remarquables initiatives ».

Une intéressante initiative :

Le lycée Montalembert de Courbevoie, d'où sont parvenues 38 copies, est distingué par un prix de la participation.

ANNEXES

Les pages suivantes comportent deux annexes :

Olympiades Internationales de Mathématiques

Tokyo – Japon – 2003 160

Quelques extraits des actes du stage de

Saint Malo – 2003 162