

Solution

- 1) a) Au début, il y a les n boîtes. Mais, au moins à la fin, il apparaîtra des boîtes vides.

Et, au cours des étapes vont apparaître *des boîtes de même contenance, qui compteront pour une seule* : elles subiront le même sort à chaque étape.

Si bien qu'au lieu de raisonner sur des boîtes, autant vaut le faire sur des contenances distinctes (avec la boîte vide possible).

Donc, si, au départ, il y a les n boîtes, nous dirons que cela correspond à m contenances, avec $m = n + 1$.

Au cours des étapes, si nous avons, par exemple, des boîtes avec 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 1 ; 2 ; 3 jetons, cela fait six contenances : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5.

- b) Supposons, soit au départ, soit lors d'une étape, que nous ayons m contenances (six dans l'exemple ci-dessus). Dans l'étape qui suit, nous choisirons d'enlever le même nombre de jetons à chacune de k boîtes distinctes.

Il subsiste alors au moins k contenances distinctes ou au moins $m - k$ contenances distinctes.

Ainsi, à partir de $0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5$ ($m = 6$)

- enlevons 3 jetons à 4 et à 5, ce qui conduit à 1 et à 2. Il reste 4 contenances ($m - k$) distinctes,
- ou bien enlevons 2 jetons à 2 ; 3 ; 4 ; 5, ce qui conduit à $0 ; 1 ; 2 ; 3$ (qui « absorbe » les 0 ; 1 non touchés). Il y a 4 contenances (k) distinctes.

De là une propriété fondamentale : en partant de m contenances, l'étape qui suit laisse subsister au moins $m/2$ contenances (distinctes, répétons-le).

Toute stratégie devra donc viser à obtenir seulement $m/2$ composantes ou à s'en approcher le plus possible ($m/2$ est entier si et seulement si m est pair).

c) Avec 7 boîtes : respectivement de 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 jetons. Il y a 8 contenances en jeu : $0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7$.

Il devra en subsister, après la première étape, au moins 4.

Essayons donc d'en avoir seulement 4. Pour cela, il faut retrancher 4 jetons à chacune des quatre dernières boîtes, ce qui donne : $0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3$, soit quatre contenances : $0 ; 1 ; 2 ; 3$.

La nouvelle étape devra laisser subsister au moins deux contenances. Le minimum de 2 est atteint en enlevant 2 jetons à chacune des deux dernières boîtes, ce qui donne : $0 ; 1 ; 0 ; 1$, soit deux contenances : $0 ; 1$.

Là il suffit d'extraire 1 jeton de la « boîte » de 1. Il vient : $0 ; 0$.

Cela a pris trois étapes.

L'application de la propriété **1.b)** assure que ce nombre-là est le minimum possible.

2) Appliquons la même stratégie avec 2003 boîtes initiales, soit 2004 contenances (distinctes, possibles) :

$0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \dots ; 1000 ; 1001 ; 1002 ; 1003 ; \dots ; 2003$

1002 boîtes distinctes

1002 boîtes distinctes

Enlevons 1002 jetons de chacune des 1002 dernières boîtes. Il vient :

$0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \dots ; 1001 ; 0 ; 1 ; 2 ; \dots ; 1001$

soit 1002 contenances (distinctes) : $0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \dots ; 1001$.

Enlevons 501 jetons à chacune des 500 dernières boîtes de

$0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \dots ; 500 ; 501 ; 502 ; \dots ; 1001$. Il vient :

$0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \dots ; 500 ; 0 ; 1 ; \dots ; 500$

soit 501 contenances (distinctes) : $0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \dots ; 500$.

de $2^a < n + 1 \leq 2^{a+1}$ au départ, avant toute action, jusqu'à $1 < \{1,0\} \leq 2^1$ qui conduit à toutes les boîtes vides.

Cela fait donc $a + 1$ étapes.

Remarque : $a + 1 = E[\log_2 n + 1]$, n étant le nombre initial de boîtes de 1 à n jetons, puisque $2^a < n \leq 2^{a+1}$.

Une solution de F. Lo Jacomo

Il ne me semble pas nécessaire de faire tout le raisonnement d'optimisation dès la première question, ce qui peut donner à certains l'impression que l'exercice est inabordable. On trouve empiriquement une solution en trois étapes : pourrait-on en trouver une en deux étapes ? A la première étape, on prend a jetons de certaines boîtes, à la seconde, on prend b jetons de certaines boîtes (les mêmes ou d'autres, peu importe). A l'issue de ces deux étapes, chaque boîte aura diminué soit de 0, soit de a , soit de b , soit de $a + b$ jetons : parmi les 7 boîtes, l'une au moins n'aura ni a , ni b , ni $a + b$ jetons et ne sera pas vide après ces deux étapes.

Pour la seconde question, on ne demande pas si la stratégie trouvée est optimale, il suffit donc de la décrire. L'optimisation intervient, par contre, à la dernière question, mais là, la méthode suggérée ci-dessus peut s'appliquer : si l'on prend a_1 jetons à la première étape, a_2 à la deuxième, ... a_k à la k -ième, à l'issue de ces k étapes, chaque boîte aura diminué de $(\varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \dots + \varepsilon_k a_k)$ jetons, avec $\varepsilon_i = 0$ ou 1, ce qui peut prendre au plus 2^k valeurs distinctes, dont 0. Si $n \geq 2^k$, au moins un des entiers non nuls $\{1, 2, \dots, n\}$ n'est pas de cette forme, et la boîte correspondante ne sera pas vidée par ces k étapes. Si par contre $2^{k-1} \leq n < 2^k$, on enlève 2^{k-1} jetons de toutes les boîtes qui en ont au moins 2^{k-1} , ce qui prouve par récurrence que k étapes suffisent. L'algorithme ainsi amorcé est un peu plus simple que celui proposé dans la solution publiée (la parité de n n'intervient pas).

Commentaires

de la cellule académique sur les prestations des candidats :

« Des algorithmes exacts, parfois sous forme de programmes. La qualité réside dans la justification de l'optimisation ».

de la rédaction de la brochure

- L'exercice est joli, on y entre assez facilement dès lors que l'on veut bien expérimenter (sur papier !).
- Toute la difficulté vient peut-être de cette intervention de la boîte vide alors qu'il n'y en a aucune au départ. Peut-être dérouterait-on moins en partant de $n + 1$ boîtes de contenances respectives $0 ; 1 ; 2 ; \dots ; n$ jetons. Cela éviterait

peut-être des confusions entre nombre de boîtes et nombre de contenances qui, d'après ce que j'ai lu, ont fortement encombré voire faussé des raisonnements.

- La propriété fondamentale dégagée, par le corrigé, au **1.b)** pourrait apparaître, autrement, au long des exemples numériques du **1** et du **2**, voire du début au **3**. Mais la rédaction peut alors être plus longue...
- L'exemple exigé au 1) est un peu particulier puisque le nombre m de contenances est alors une puissance de 2. Avant de passer à $n = 2003$ (où m , égal à 2004, est encore pair), il est sage de procéder à d'autres essais, notamment avec m impair. L'énoncé pourrait-il y inciter ?

Déroulement de l'épreuve, palmarès

142 candidats : 108 garçons, 34 filles.

298 élèves étaient inscrits, on constate donc de très nombreux absents ; le taux d'absentéisme est très variable selon les établissements. Il faudrait le réduire...

Les candidats sont répartis sur les huit départements : Ariège (7 sur 8 inscrits), Aveyron (11 sur 33 inscrits), Haute Garonne (35 sur 109 inscrits), Gers (1 sur 4), Lot (17 sur 19 inscrits), Hautes-Pyrénées (13 sur 32 inscrits), Tarn (56 sur 77 inscrits), Tarn-et-Garonne (9 sur 16 inscrits).

La participation d'élèves des séries technologiques est très faible.

Série	S		STI		STT	
	Filles	Garçons	Garçons	Filles	Garçons	Filles
Effectif	34	105	0	1	0	2
Total	139		1		2	

Les lauréats :

25 lauréats, tous de 1^{ère} S, sont retenus. Ils proviennent de 19 lycées (sur les 112 de l'académie).

Ils sont classés en 14 prix (12 lauréats ex-aequo au 14^{ème} rang).

Les trois premiers :

1. Vincent LAVIRON (né le 11/06/87) Lycée de SAINT-ORENS (31)
2. Raphaël GUIGNARD (né le 01/03/86) Lycée P. de Fermat – TOULOUSE
3. Julien CABES (né le 19/08/86) Lycée Théophile Gautier – TARBES

Le premier est classé deuxième au palmarès national.

Le deuxième y figure aussi, en premier accessit.

Bravo Toulouse !