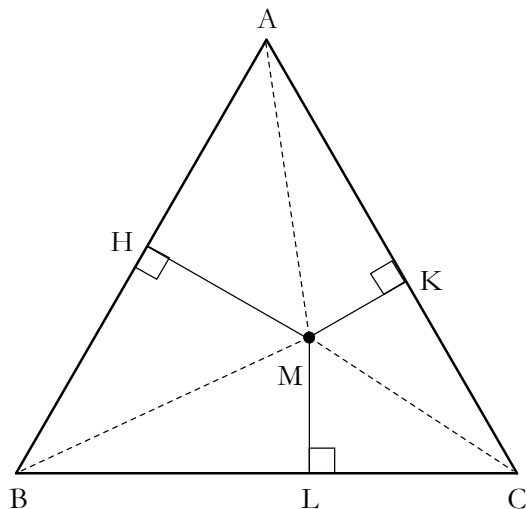


Solution



L'aire du triangle équilatéral ABC est : $\frac{a \times h}{2}$.

D'autre part, l'aire du triangle ABC est la somme des aires des 3 triangles MAB, MAC et MBC.

On en déduit : aire (MAB) + aire (MAC) + aire (MBC) = aire (ABC)

$$\text{soit} \quad \frac{MH \times a}{2} + \frac{MK \times a}{2} + \frac{ML \times a}{2} = \frac{a \times h}{2}$$

$$\text{puis} \quad (MH + MK + ML) \times \frac{a}{2} = h \times \frac{a}{2}.$$

D'où le résultat : $\boxed{MH + MK + ML = h}$

INSPIRATION : le théorème de Viviani.

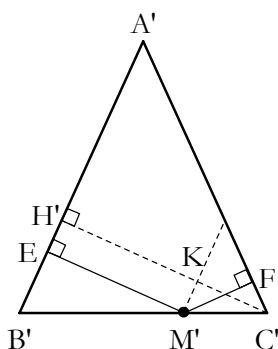
Commentaires

a) de l'équipe académique

Une vingtaine de candidats ont rédigé la solution en utilisant les aires (solution qui était attendue). Une vingtaine de candidats ont traité l'exercice en prenant un point M particulier (souvent le centre de gravité du triangle équilatéral ABC). Une trentaine de candidats ont essayé, sans succès, d'utiliser le théorème de Pythagore. Quelques candidats ont tenté de trouver la réponse par le théorème de Thalès ou la trigonométrie, mais sans succès également. Enfin, une soixantaine de candidats n'ont rien fait ou seulement la figure.

b) de la rédaction de la brochure

Parmi les solutions possibles, moins « élégantes », naturelles et rapides que celle du corrigé par les aires, il en est une qui utilise *une propriété (du même genre) de tout point de la base d'un triangle isocèle*.



Soit un triangle isocèle $A'B'C'$, de base $[B'C']$ et un point M' de $[B'C']$.

$$M'E + M'F = C'H' \text{ (constante)}$$

Pour appliquer cette propriété au triangle équilatéral ABC et au point M intérieur, il suffit de tracer, par exemple, par M la parallèle $B'C'$ à BC (B' sur $[AB]$ et C' sur $[AC]$). Alors $MH + MK = C'H'$ (hauteur de $A'B'C'$). Etc.

La propriété relative à la base du triangle isocèle $A'B'C'$ peut se démontrer de bien des façons :

- toujours par les aires : $\text{aire}(A'B'C') = \text{aire}(A'B'M') + \text{aire}(A'C'M')$
 c'est-à-dire $A'B' \times C'H = A'B' \times M'E + A'C' \times M'F$
 or $A'C' = A'B'$
 d'où ...
- par un peu de trigonométrie : $M'E = M'B' \sin \widehat{B'}$ et $M'F = M'C' \sin \widehat{C'}$
 or $\widehat{B'} = \widehat{C'}$
 etc.
- par l'intervention de la parallèle, par M' , à $(A'B')$:
 $M'E = KH'$ et $M'F = C'K$ (démonstration par symétrie ou cas d'égalité, ou...)

Cette propriété du triangle équilatéral s'utilise en statistique-probabilités :

- par exemple lors de partages entre trois intervenants (pour une représentation graphique, très intéressante, si les partages évoluent).
- par exemple, en fournissant l'une des solutions du classique problème du partage d'un spaghetti en trois morceaux au hasard (Quelle est la probabilité pour qu'on puisse en faire un triangle ? Cf. brochure APMEP n° 22, pages 193-194)

Déroulement de l'épreuve, palmarès

Cette troisième année est un succès : 170 inscrits (dont 61 filles) et 134 présents le jour de l'épreuve (contre 41 en 2002 !).

Début du palmarès :

1^{er} :	Alexandre VIADUC	Lycée Jehan Ango	DIEPPE
2^{ème} :	Laure-Emmanuelle CARRA	Lycée Pierre Corneille	ROUEN
3^{ème} :	Nikolay QVILLER	Lycée Pierre Corneille	ROUEN