

Solution

Le premier jeton n'étant jamais retourné, aura donc sa face visible blanche.

Considérons à présent, le jeton de rang r ($r \geq 2$). Sa face visible sera blanche si et seulement si on l'a retourné un nombre pair de fois. Or, il sera retourné dans la série de retournements de d en d à partir du $d^{\text{ème}}$, si et seulement si d est un diviseur de r (puisque seuls les jetons de rang $d, 2d, 3d, \dots$ seront retournés). Ainsi, on le retournera autant de fois qu'il y a de diviseurs de r autres que 1. Il est donc nécessaire et suffisant que r possède un nombre impair de diviseurs. Comme on peut associer à chaque diviseur d de r , le diviseur d' (quotient de r par d), on peut regrouper les diviseurs de r par paires (où l'on peut convenir que $d < d'$), sauf lorsque $d = d'$ (et alors $d = \sqrt{r}$), de sorte que r possède un nombre impair de diviseurs si et seulement si r est de la forme d^2 (i.e., r est un carré).

Le jeton de rang r gardera donc sa face blanche visible si et seulement si r est un carré : on trouve donc les jetons dont la face visible est blanche, aux rangs 1, 4, 9, ..., n^2 , ...

Commentaire des rédacteurs de la brochure

Joli exercice d'arithmétique très élémentaire (notion de diviseur) et de réflexion.

Palmarès

136 participants et 17 primés.