

Solution

Méthode 1 (Serge Ferry)

On remarque que $\widehat{PTQ} \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et la fonction tangente étant strictement croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, α est maximal si et seulement si $\tan \alpha$ est maximale.

$$\text{On a } \tan \alpha = \tan(\widehat{ETQ} - \widehat{ETP}) = \frac{\tan \widehat{ETQ} - \tan \widehat{ETP}}{1 + \tan \widehat{ETQ} \times \tan \widehat{ETP}} = \frac{\frac{15,6}{x} - \frac{10}{x}}{1 + \frac{15,6}{x} \times \frac{10}{x}}$$

$$\text{d'où } \tan \alpha = \frac{5,6x}{x^2 + 156} = f(x) \text{ pour } x \in [0; +\infty[.$$

On étudie les variations de f .

$$f'(x) = \frac{-5,6(x^2 - 156)}{(x^2 + 156)^2}$$

x	0	$\sqrt{156}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x) = \tan \alpha$	0	Max	0

α est maximal pour $x = \sqrt{156}$

Méthode 2

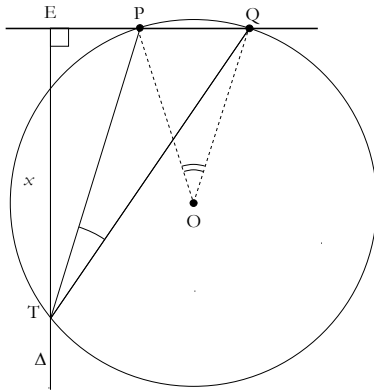


figure 1

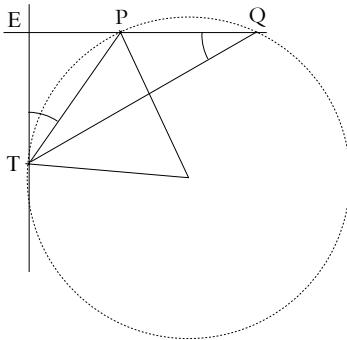


figure 2

Soit un point T arbitraire sur Δ , perpendiculaire en E à (PQ).

$\widehat{PTQ} = \frac{1}{2} \widehat{POQ}$ où O est le centre du cercle circonscrit à PTQ.

Il s'agit donc de rendre $\widehat{POQ}$ maximum, ce qui, OPQ étant isocèle, correspond au minimum du rayon.

On prendra donc le cercle tangent à Δ , T étant son point de contact (fig. 2)

On pourrait alors savoir (puissance d'un point par rapport à un cercle) que :

$$ET^2 = EP \times EQ = 156$$

Dans la mesure où cette notion n'est plus au programme, on obtient la relation en considérant les triangles rectangles ETP et ETQ, semblables puisque $\widehat{Q} = \widehat{ETP}$ (angles inscrits interceptant le même arc), et les rapports des côtés homologues.

Palmarès

427 inscrits (dont 117 filles) et 242 présents

Les trois premiers sont :

- 1- Simon NOUIS (*Premier accessit ex-aequo national*)
- 2- Shao Kang XIE (*Premier accessit ex-aequo national*)
- 3- Benoît LAMY.