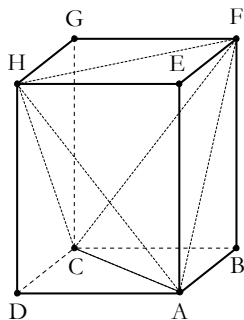


Solution

On rappelle la formule donnant le volume du tétraèdre :

$$V = \frac{\text{aire}(\text{base}) \times \text{hauteur}}{3}$$



1°) a) Notons L le parallélépipède ABCDEFGH et T le tétraèdre MNPQ (les quatre sommets sont distincts et on ne tient pas compte de l'ordre). On suppose que les sommets de T sont pris parmi ceux de L. On peut alors distinguer trois cas :

- **A - Les quatre sommets de T sont sur une même face de L.** Il y a 6 cas de cette sorte, chacun correspondant à un volume nul.
- **B – Trois des quatre sommets de T sont sur une face** et le quatrième est sur la face opposée. Dans ce cas, le volume de T est égal à $\frac{AB \times BC}{2} \times \frac{AE}{3}$ soit 1 cm^3 dans tous les cas de figure.
- **C – Deux seulement des sommets de T sont sur un même face.** Les deux sommets en question (M et N, par exemple) peuvent être alors sur une même arête de la face, ou bien opposés sur cette face : les deux autres sommets de T (donc P et Q) sont alors respectivement sur la face opposée et situés sur une arête parallèle à (MN) (exemple, AEGC), ou bien sur la face opposée en quinconce avec MN (exemple, ACFH).

C1 MN//PQ : on obtient 6 tétraèdres « plats » du type AEGC, de volume nul.

C2 Sommets en quinconce : il n'y a que deux cas correspondant à cette situation : ACHF et BDEG. Le calcul du volume de ACHF peut se faire par soustraction en retranchant du volume total (6 cm^3) le volume de chacun des quatre tétraèdres ADCH, ACBF, GFHC, AEFH (soit $4 \times 1 \text{ cm}^3$) : ce volume est donc égal à 2 cm^3 , et il en est de même pour BDEG.

En résumé, seul le cas B fournit un volume égal à 1 cm^3 .

b) Il faut donc dénombrer les tétraèdres dont trois des quatre sommets sont sur une même face de L, et le quatrième sur la face opposée.

Il y a 6 faces sur L, et sur chacune d'entre elles, 4 triangles possibles. Pour chacun de ces triangles, 4 sommets possibles sur la face opposée. Soit, au total : $6 \times 4 \times 4 = 96$ tétraèdres. Chacun de ces 96 tétraèdres est repéré comme un triplet dont le premier élément est une face qui contient 3 des sommets de T. Mais certains d'entre eux sont comptés plusieurs fois : si l'on considère par exemple le tétraèdre ABCE, il sera compté deux fois, une fois pour la face ABCD et une autre fois pour la face ABFE.

Un tétraèdre n'est compté qu'une fois si son « quatrième sommet » admet une projection sur la face opposée distincte des trois autres sommets de T (exemple : ADCF). Il n'y a alors pas d'ambiguïté sur la face contenant les trois sommets puisqu'elle est unique.

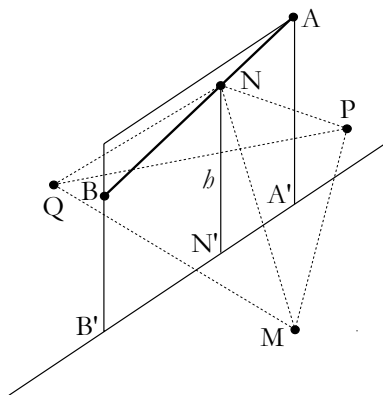
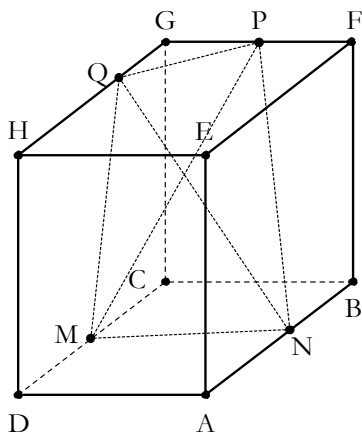
Il sera compté deux fois si cette projection coïncide avec un des sommets différents de l'angle droit du triangle situé sur la face opposée (exemple : ABCE). En effet, il existe alors deux faces de L qui contiennent trois des sommets de T (sur l'exemple : ABCD, ABEF).

Enfin, il sera compté trois fois si cette projection coïncide avec le sommet de l'angle droit du triangle situé sur la face opposée (exemple : ABCF). En effet, il existe trois faces de L qui contiennent trois des sommets de T (sur l'exemple : ABCD, ABEF, BCGF).

On dénombre donc 24 tétraèdres comptés une fois, 48 comptés deux fois et 24 comptés trois fois, soit un total de $24 + \frac{48}{2} + \frac{24}{3} = 56$ **tétraèdres distincts de volume 1**.

On dénombre d'après le raisonnement de 1°)a) **2 tétraèdres de volume 2** et **12 tétraèdres de volume nul**. Soit effectivement un total de 70 (on pouvait aussi dénombrer le cas du volume 1 en utilisant cette indication par soustraction : $70 - 12 - 2 = 56$).

2°)



Considérons, comme sur la figure ci-dessus un tétraèdre $T = MNPQ$ dont les sommets sont situés sur les arêtes de L. Supposons **trois** de ces sommets fixes (par exemple MPQ) et le troisième variable sur l'arête où il se situe (par exemple N). Le volume de T est égal au tiers du produit de l'aire du triangle MPQ (fixe) par la hauteur h issue de N (variable lorsque N parcourt AB). Traçons un plan perpendiculaire à MPQ et qui contient l'arête AB (il se peut que l'arête AB soit perpendiculaire au plan MPQ comme sur la figure 2).

Ce plan rencontre MPQ selon une droite, la hauteur h représentant la distance du point N à cette droite : on est donc ramené à déterminer sur le segment $[AB]$ le point dont la distance à une droite coplanaire donnée est maximale.

- Si la droite (AB) n'est pas parallèle au plan MPQ, cette distance NN' sera maximale lorsque $N = A$ ou $N = B$ puisque, dans ce cas, la figure $ABB'A'$ est un trapèze rectangle dans lequel ou bien $BB' < NN' < AA'$, ou bien $AA' < NN' < BB'$ (voir figures 1 et 2)

- Si la droite (AB) est parallèle au plan MPQ, la distance NN' est alors constante et l'on peut déplacer le point N en A ou B sans modifier h (voir figure 3).

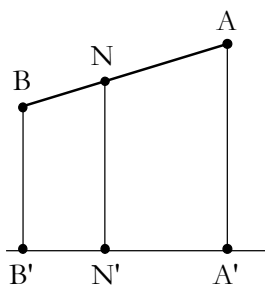


figure 1

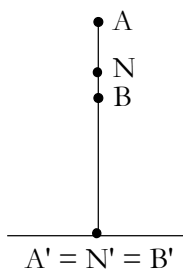


figure 2

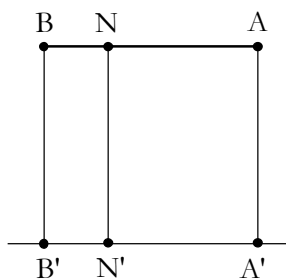


figure 3

Ainsi dans tous les cas de figure, le volume de MPQN sera maximum si on place le point N en l'un des sommets A ou B de L : plaçons N en ce point. Le nouveau tétraèdre T_1 obtenu a un volume supérieur à celui de T.

« Libérons » maintenant le point M sur l'arête DC (Q, N, P étant fixés). Le même raisonnement prouve que le volume maximal de T_1 sera obtenu si $M = D$ ou $M = C$; plaçons M en ce point et notons T_2 le nouveau tétraèdre obtenu. Libérons maintenant Q sur l'arête HG (M, N, P fixés) le volume de T_2 sera maximal si $Q = H$ ou $Q = G$; plaçons Q en ce point et notons T_3 le nouveau tétraèdre obtenu.

Finalement libérons le point P sur l'arête GF ; le volume de T_3 sera maximal si $P = G$ ou $P = F$. Lorsque l'on place P en ce point, on obtient un tétraèdre de volume supérieur à celui de T et dont les quatre sommets sont des sommets de L. On est alors ramené au 1°) et le volume de T_3 est au maximum égal à 2.

En conclusion, le volume maximal d'un tel tétraèdre est égal à 2, et ceci ne se produit que pour les deux tétraèdres ACFH et DBEG.

Commentaires de l'équipe académique

« 10% des copies ont obtenu une liste, la plupart du temps non exhaustive, des tétraèdres de volume 1. Une seule signale le total de 56.

1 copie signale l'existence d'un tétraèdre de volume 2, mais sans justifier.

Aucune copie ne traite le problème de façon exhaustive, donc pas de réponse correcte à la question 1^b) (quelles sont les valeurs possibles pour le volume du tétraèdre ?).

Pas d'approche de la question 2.

Cet exercice est souvent abordé en dernier, la géométrie dans l'espace est donc plutôt redoutée par les étudiants, ce qui était prévisible. Cependant l'énoncé proposait une situation simple, basée sur une formule de volume non rappelée dans le texte (à ce sujet, au moins un quart des copies fournissent une formule fausse pour le volume du tétraèdre). La difficulté consistait à organiser la recherche de tous les cas autour d'un nombre limité de situations que l'on peut considérer comme identiques puis de procéder à un dénombrement. La notion de classe d'équivalence n'est plus enseignée. Il se trouve cependant, en première, nombre de situations classiques, notamment en géométrie, où l'on est amené à classer des objets : c'est ce premier point qui n'a pas été abordé correctement par les élèves, et le dénombrement qui s'ensuit s'appuyait alors sur une base bancable. Il ne pouvait aboutir.

Bien que l'exercice ait été peu réussi, il apparaît comme formateur et accessible à ce niveau. Peut-être le fait qu'il soit abordé en dernier explique-t-il le faible taux de réussite. »

Palmarès

Nombre d'inscrits : 137 ; nombre de présents : 101

Voici les trois premiers lauréats :

1-	Mathieu AUBRY	Lycée Jean Giraudoux	CHATEAUROUX
2(ex)	Blandine MERLE	Lycée en Forêt	MONTARGIS
2(ex)	NIYOMNAITHAM Benjaporn	Lycée Notre Dame la Riche	TOURS

Mathieu AUBRY a obtenu un huitième accessit au palmarès national.