

Solution :

On note : $x = OA = OB$ et $y = OC = OD$.

On a donc : $P_1 = x(2 + \alpha)$; $S_1 = x^2 \frac{\alpha}{2}$;

$$P_2 = 2(y - x) + \alpha(x + y) ; \quad \text{et } S_2 = (y^2 - x^2) \frac{\alpha}{2}.$$

1. Si $P_1 = P_2$ alors : $2x = 2(y - x) + y\alpha$, soit $4x - 2y = y\alpha$ (1).

Et si $S_1 = S_2$ alors : $x^2 = y^2 - x^2$, soit $y = \sqrt{2}x$

En remplaçant y par $\sqrt{2}x$ dans l'équation (1) on obtient :

$$4x - 2\sqrt{2}x = \sqrt{2}x\alpha$$

donc : $\alpha = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$$= 2(\sqrt{2} - 1)$$

2. Si $S_1 = S_2$, alors : $y = \sqrt{2}x$

$$\begin{aligned} \text{On a donc : } \frac{P_2}{P_1} &= \frac{2(y - x) + \alpha(x + y)}{x(2 + \alpha)} \\ &= \frac{2(\sqrt{2}x - x) + \alpha(x + \sqrt{2}x)}{x(2 + \alpha)} \\ &= 1 + \sqrt{2} - \frac{4}{2 + \alpha}. \end{aligned}$$

On montre que la fonction $f(\alpha) = 1 + \sqrt{2} - \frac{4}{2 + \alpha}$ est strictement croissante sur $]0; \pi]$.

Donc le rapport $\frac{P_2}{P_1}$ est maximal en $\alpha = \pi$, par contre il n'y a pas de valeur de α pour laquelle $\frac{P_2}{P_1}$ est minimal.

3. Si $P_1 = P_2$ alors : $y = \frac{4x}{2+\alpha}$, et comme $y \geq x$ alors $\alpha \in]0;2]$.

$$\begin{aligned}\text{On a donc : } \frac{S_2}{S_1} &= \frac{y^2}{x^2} - 1 \\ &= \frac{(4x)^2}{(2+\alpha)^2} - 1 \\ &= \frac{16}{(2+\alpha)^2} - 1\end{aligned}$$

On montre que la fonction $g(\alpha) = \frac{16}{(2+\alpha)^2} - 1$ est strictement décroissante sur $]0;2]$. Donc le rapport des aires $\frac{S_2}{S_1}$ est minimal en $\alpha = 2$, par contre il n'y a pas de valeur de α pour laquelle $\frac{S_2}{S_1}$ est maximal.

CANDIDATS ET LAURÉATS

333 candidats inscrits.

Seuls 237 ont composé (171 garçons et 66 filles), dans 11 centres.

On compte parmi les participants : 15 STI, 4 STL et 1 STT.

Les **3 premiers lauréats** sur 11 primés.

1^{er} prix :	STEINER Christophe	Lycée Teyssier (Bitche)
2^{ème} prix :	JOHANN Claire	Lycée Fabert (Metz)
3^{ème} prix :	BOUAFIA Philippe	Lycée Poincaré (Nancy)