

Solutions

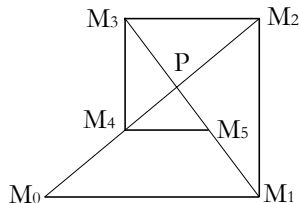
Quelques suggestions

Une méthode géométrique (il existe beaucoup de variantes)

Détermination de L

Soit P le point d'intersection de $[M_0M_2]$ et $[M_1M_3]$. Soit N le point d'intersection de $[M_0M_2]$ avec la parallèle à $[M_1M_2]$ passant par M_3 .

Démontrons que $N = M_4$.



En faisant appel aux triangles semblables, aux homothéties ou au théorème de

Thalès, on démontre que : $\frac{M_3N}{M_2M_1} = \frac{PM_3}{PM_1} = \frac{M_3M_2}{M_0M_1} = a^2$.

Donc $M_3N = a^3$ et $N = M_4$.

Les points M_{2k} sont donc sur (M_0M_2) .

De la même façon, les points M_{2k+1} sont sur (M_1M_3) .

Démontrons que PM_n est une suite géométrique de raison a .

Les triangles $M_0M_1M_2$ et $M_1M_2M_3$ sont semblables, donc les triangles M_0PM_1 et M_1PM_2 sont semblables (deux angles égaux).

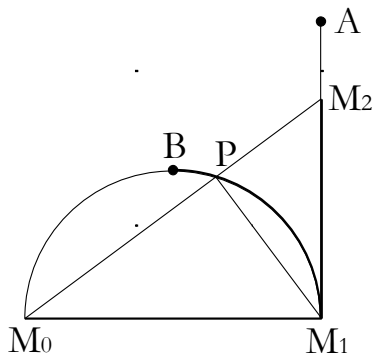
Les alignements qui viennent d'être justifiés permettent de démontrer, de proche en proche, que les triangles M_nPM_{n+1} sont semblables et donc $PM_{n+1} = aPM_n$.

Le point P est le point L cherché puisque PM_n tend vers 0.

Lieu de L

L'angle $\widehat{M_0LM_1}$ est droit, donc L appartient au cercle de diamètre $[M_0M_1]$.

Quand a décrit $]0 ; 1[$, M_2 décrit le segment M_1A (extrémités exclues) avec M_1M_0A triangle rectangle isocèle, donc L décrit le quart de cercle M_1B (extrémités exclues).



Une méthode analytique

Détermination de L

Par construction, pour $k > 0$,

- l'abscisse de M_{2k} (et de M_{2k-1}) est la somme des k premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison $-a^2$,
- l'ordonnée de M_{2k} (et de M_{2k+1}) est la somme des k premiers termes de la suite géométrique de premier terme a et de raison $-a^2$.

Donc l'abscisse x_n de M_n tend vers $\frac{1}{1+a^2}$ et l'ordonnée y_n de M_n tend vers

$$\frac{a}{1+a^2}.$$

Soit L le point de coordonnées $\left(\frac{1}{1+a^2}, \frac{a}{1+a^2} \right)$.

La limite de $LM_n = \sqrt{(x_n - x_L)^2 + (y_n - y_L)^2}$ est donc nulle.

Lieu de L

En remplaçant, $(x_L - 0,5)^2 + y_L^2 = 0,25$.

Quand a décrit $]0 ; 1[$, $\frac{1}{1+a^2}$ décrit $]0,5 ; 1[$, d'où le lieu cherché.

Commentaires

Cet exercice, rapidement intelligible, met en jeu des connaissances de base d'analyse, avec un bon appui expérimental. Un tel choix semble très heureux.

Pourtant, sur les 16 primés, l'un a été noté A, un autre B/A, deux B, un B/C, un C et 10 D !!

Statistiques

156 candidats inscrits

107 candidats présents.

Palmarès

- | | | |
|--------------------------------------|---------------------|----------|
| 1- Ivan BOYER (1 ^{ère} S) | Lycée polyvalent | LA MURE |
| 2- Naoko KOTERA (1 ^{ère} S) | Lycée international | GRENOBLE |
| 3- Guillaume CHEVRIER | Lycée Champollion | GRENOBLE |