

Solution « officielle »

1°) On obtient facilement le tableau suivant où les valeurs de p_n sont données avec deux décimales exactes* :

n	p_n	n	p_n	n	p_n	n	p_n
1	20	6	16,66	11	16,36	16	16,25
2	20	7	17,14	12	16,66	17	16,47
3	20	8	17,50	13	16,92	18	16,66
4	20	9	17,77	14	17,14	19	16,84
5	16	10	16	15	16	20	16

2°) On peut émettre les conjectures suivantes :

- $p_n = 16$ lorsque n est multiple de 5.
- Les suites (p_{5k+1}) , (p_{5k+2}) , (p_{5k+3}) , (p_{5k+4}) sont décroissantes.
- $p_{5k+1} < p_{5k+2} < p_{5k+3} < p_{5k+4}$ pour tout entier naturel k .
- (p_n) converge vers 16 comme d'ailleurs les suites extraites (p_{5k+1}) , (p_{5k+2}) , (p_{5k+3}) , (p_{5k+4}) , (p_{5k}) .

On se propose, dans les questions qui viennent, de prouver certaines de ces conjectures.

* N.D.L.R. Le corrigé montre qu'il s'agit d'un livre gratuit par tranche de 5 livres commandés. Cette interprétation n'était pas évidente ! Quelles ont été les réactions des élèves ?

3°) et 4°) Si $n = 5k$, on paye $4k$ livres et l'éditeur offre k livres. Le prix payé est donc $80k$ € et le prix de revient moyen est bien 16 €.

Le nombre de livres offerts reste égal à k lorsque $n = 5k + r$ où $r = 1, 2, 3, 4$. On

a donc : $p_n = 20 \frac{4k+r}{5k+r}$ qu'il est commode de mettre sous la forme :

$p_n = 16 + \frac{4r}{n}$. Cette formule donne la forme explicite de p_n et prouve en outre que l'équation $p_n = 16$ n'a pas d'autre solution que $n = 5k$.

5°) La suite (p_n) converge vers 16 comme on pouvait s'y attendre.

Compléments : Il est intéressant de constater :

- Que $\frac{n}{4}(p_n - 16)$ converge vers r .

- Que la suite (p_{5k+r}) , pour r fixé, est décroissante. En effet :

$$p_{5(k+1)+r} - p_{5k+r} = \frac{-20r}{(5(k+1)+r)(5k+r)} < 0.$$

Chacune de ces suites extraites converge évidemment vers 16 .

Remarques de la rédaction

L'exercice semble judicieusement choisi : départ facile, difficultés progressives, toujours aisément surmontables, à la difficulté d'interprétation de l'énoncé près. Il s'agit, de plus, d'une vraie « situation concrète », et captivante !

Statistiques

118 élèves ont concouru, « beaucoup moins que l'an passé ». « De trop nombreux lycées n'ont fourni aucun candidat. Nous restons cependant dans une fourchette raisonnable compte tenu du « poids » de l'académie de Dijon ».

Palmarès

10 primés, tous de 1^{ère} S.

Deux copies se détachent du lot.

1^{er} prix : François STEINKAMP
2^{ème} prix : Franck GABRIEL
3^{ème} prix : Damien CUENOT

Lycée Notre-Dame – DIJON
Lycée Carnot – DIJON
Lycée Carnot – DIJON.