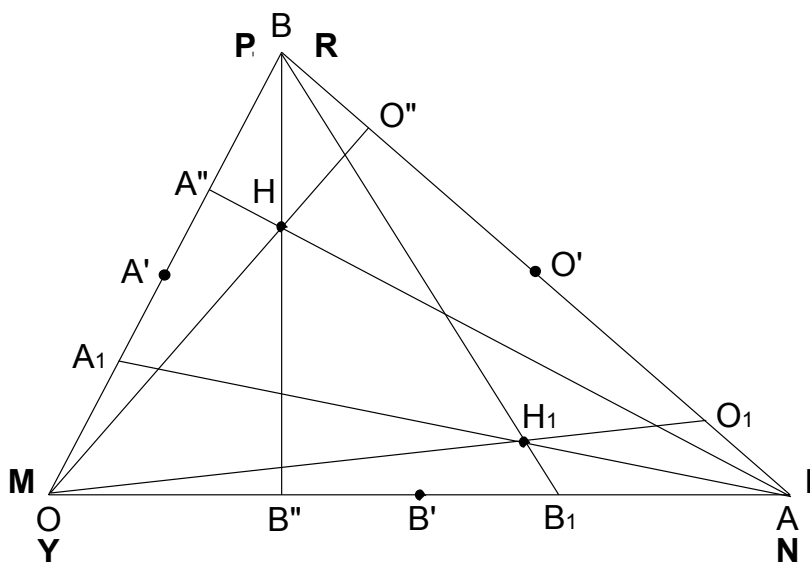


1. Reproduire à la règle et au compas la figure et la compléter en représentant les six cordes dans leur position finale.
2. Les cordes des trois garçons se croisent-elles en un même point ? Pourquoi ?
3. Les cordes des trois filles se croisent-elles en un même point ? Pourquoi ?

Solution

1. Figure



2. Désignons par B'' , O'' et A'' les points marqués respectivement sur les côtés $[OA]$, $[AB]$ et $[BO]$. B'' , O'' et A'' étant les points les plus proches de B , O et A sont les pieds des hauteurs issues respectivement de B , O et A . Les trois hauteurs étant concourantes, il en résulte que les cordes des trois garçons se croisent en un même point (orthocentre).

3. Désignons par B' , O' et A' les milieux respectifs des segments $[OA]$, $[AB]$ et $[BO]$, par B_1 , O_1 et A_1 les points où s'arrêtent respectivement Nicole, Isabelle et Marie, et par H le point de concours des trois hauteurs du triangle OAB .

$$\overrightarrow{OB''} = \overrightarrow{B_1A}, \overrightarrow{BO''} = \overrightarrow{O_1A} \text{ et } \overrightarrow{BA''} = \overrightarrow{A_1O}. \quad \overrightarrow{OB''} = \overrightarrow{B'B''} - \overrightarrow{B'O} \text{ et } \overrightarrow{B_1A} = \overrightarrow{B'A} - \overrightarrow{B'B_1}.$$

Comme $\overrightarrow{OB''} + \overrightarrow{AB_1} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{B'O} + \overrightarrow{B'A} = \vec{0}$, nous obtenons :

$$\overrightarrow{B'B''} + \overrightarrow{B'B_1} = \overrightarrow{OB''} + \overrightarrow{B'O} + \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{B'A} = \vec{0}. \quad B' \text{ est donc le milieu de } [B_1B''].$$

On montre de même que O' est le milieu de $[O_1O'']$ et A' le milieu de $[A_1A'']$. Il existe des réels p , q et r strictement positifs tels que H soit le barycentre des

points pondérés (O,p) , (A,q) et (B,r) .

En utilisant l'associativité de la barycentration, on trouve :

O'' barycentre de (A,q) et (B,r) , B'' barycentre de (O,p) et (A,q) , A'' barycentre de (O,p) et (B,r) .

Comme O_1 est le symétrique de O'' par rapport à O' , O_1 est le barycentre de (A,r) et (B,q) . De même B_1 est le barycentre de (O,q) et (A,p) et A_1 le barycentre de (O,r) et (B,p) .

$p \neq 0$ donc O_1 est le barycentre de (A,pr) et (B,pq) . De même, B_1 est le barycentre de (O,qr) et (A,pr) et A_1 est le barycentre de (O,qr) et (B,pq) .

Si nous désignons par H_1 le barycentre de (O,qr) , (A,pr) et (B,pq) , l'associativité de la barycentration nous montre que H_1 est le barycentre de (O,qr) et $(O_1,pr+qp)$, le barycentre de (A,pr) et $(A_1,qr+qp)$ et aussi le barycentre de (B,pq) et $(B_1,qr+pr)$.

Les droites (OO_1) , (AA_1) et (BB_1) sont donc concourantes en H_1 .

Les cordes des filles se croisent donc aussi en un même point.

Variante pour la question 3

Solution par la géométrie analytique :

L'énoncé faisait un clin d'œil avec ses choix de lettres O, A, B . Prenons donc un repère normé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, $\vec{i}$ dirigeant (OA) , de O vers A , $\vec{j}$ dirigeant (OB) , de O vers B .

Soit alors $OA = a$, $OB = b$ et $AB = \gamma$.

Il s'agit d'établir des équations de (OO_1) , (AA_1) , (BB_1) , d'en déduire les coordonnées du point de concours de deux de ces droites et de voir si elles vérifient l'équation de la troisième.

• Equation de (AA_1) : $A(b,0)$ $A_1(0, \gamma \cos \hat{B})$
 d'où, pour (AA_1) , $(\gamma \cos \hat{B})x + by - b\gamma \cos \hat{B} = 0$ (1)

• Equation de (BB_1) : $B(0,a)$ $B_1(\gamma \cos \hat{A}, 0)$
 d'où, pour (BB_1) , $ax + (\gamma \cos \hat{A})y - a\gamma \cos \hat{A} = 0$ (2).

Résolvons le système des équations (1) et (2) :

$$x = \frac{b\gamma \cos \hat{A} (a - \gamma \cos \hat{B})}{ab - \gamma^2 \cos \hat{A} \cos \hat{B}}, \quad y = \frac{a\gamma \cos \hat{B} (b - \gamma \cos \hat{A})}{ab - \gamma^2 \cos \hat{A} \cos \hat{B}}$$

(On passe d'une coordonnée à l'autre en permutant a et b , A et B).

• Equation de (OO₁) :

De $O_1A = a \cos \hat{B}$ et $O_1B = b \cos \hat{A}$, on déduit les coordonnées de O_1 :

$$x = \frac{b^2 \cos \hat{A}}{a \cos \hat{B} + b \cos \hat{A}} \text{ et } y = \frac{a^2 \cos \hat{B}}{a \cos \hat{B} + b \cos \hat{A}}$$

d'où, pour (OO₁) : $y b^2 \cos \hat{A} = x a^2 \cos \hat{B}$ (3)

En remplaçant x et y par les coordonnées du point commun à (AA₁) et (BB₁), on obtient, après simplification :

$$b^2 - b \gamma \cos \hat{A} = a^2 - a \gamma \cos \hat{B} \quad (4)$$

Or $a^2 = b^2 + \gamma^2 - 2b\gamma \cos \hat{A}$ et $b^2 = a^2 + \gamma^2 - 2a\gamma \cos \hat{B}$
et (4) s'écrit $a^2 + b^2 - \gamma^2 = a^2 + b^2 - \gamma^2$

Les droites sont bien concourantes...

Ah que cela est délicieux ! (par H.B.)

Le théorème de Jean DE CÉVA relatif aux trois droites issues respectivement des trois sommets d'un triangle résout évidemment immédiatement la question 3. Mais il n'est pas au programme ...

Parlons-en quand même :

Les droites en question, au 2° et 3°, coupent les segments-côtés. On peut donc utiliser la forme réduite du théorème, sans les mesures algébriques :

« Pour que (Aα), (Bβ) (Cγ), (α sur [BC], ...) soient concourantes, il faut et il

suffit que $\frac{\alpha B}{\alpha C} \times \frac{\beta C}{\beta A} \times \frac{\gamma A}{\gamma B} = 1$. »

Les droites (AA''), (BB'') et (OO'') étant concourantes, appliquons la « condition

nécessaire » ; nous avons l'égalité : $\frac{A''B}{A''O} \times \frac{B''O}{B''A} \times \frac{O''A}{O''B} = 1$.

Mais $\frac{A''B}{A''O} = \frac{A_1O}{A_1B}, \dots$

D'où $\frac{A_1O}{A_1B} \times \frac{B_1A}{B_1O} \times \frac{O_1B}{O_1A} = 1$.

Appliquons la « condition suffisante » :

les droites (AA₁), (BB₁) et (OO₁) sont concourantes.

Remarque 1 : La connaissance du théorème de Jean DE CEVA rend la question 3 agréable alors que les méthodes « barycentre » ou « équations » ne le sont guère... Ce n'est donc pas en réduisant les connaissances ou les documents disponibles qu'on rend les mathématiques plus intéressantes...

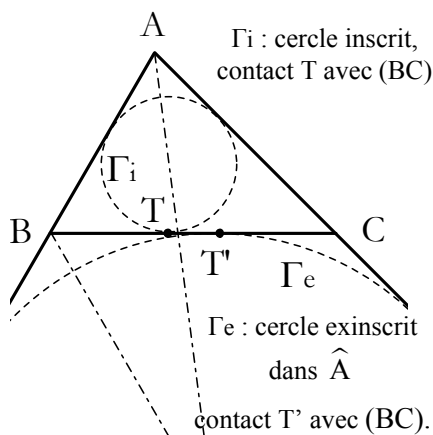
Le théorème de Ceva lui-même se démontre aisément (Cf. Coxeter : « *Redécouvrons la géométrie* ». Réédition Gabay).

Remarque 2 : Des droites (Ax) , (By) , (Cz) concourantes sont dites « *Céviennes* » (en hommage évident à Jean De Ceva).

Lorsqu'une droite (Ax') est associée à (Ax) de façon que leurs pieds sur (BC) soient symétriques par rapport au milieu de $[BC]$, (Ax) et (Ax') sont dites « *isotoniques* ».

L'exercice proposé à Créteil relève (avec la même démonstration) du résultat plus général : « les droite isotomiques de Céviennes sont, à leur tour, des Céviennes. »

Autre exemple :



Des considérations de géométrie élémentaire établissent, avec les notations classiques, que $BT = CT' = p - b$.

Or on démontre que (AT) et ses homologues issues de B et de C sont des Céviennes. De même leurs isotomiques (AT') , ...

Pour cet exemple et ceux d'entre nous que ne rebutent pas les dénominations, le point de concours des (AT) , $(B...)$, $(C...)$ est appelé *point de Gergonne* du triangle ABC , tandis que le point de concours des isotomiques est le *point de Nagel*.

Statistiques

Classe	Inscrits			Présents			Classés académiques		
	Filles	Garçons	Total	Filles	Garçons	Total	Filles	Garçons	Total
1°S	175	285	460	122	187	309	9	29	38
1°STI'	7	14	21	7	11	18			
1°STT	7	9	16	5	4	9			
1°GE		1	1	0	1	1			
Total	189	309	498	134	203	337	9	29	38

Sylvestre CHEA, lycée St Laurent de Lagny sur Marne a obtenu, au palmarès national, le 8^{ème} Accessit.