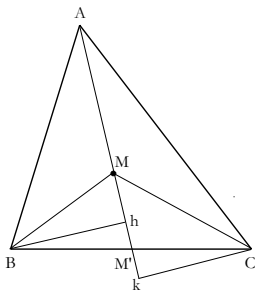
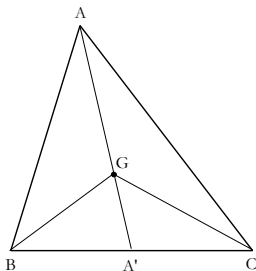


Solution



1- a) G étant le centre de gravité de ABC et A' le milieu de [BC], $AG=2 \cdot GA'$
 donc $\text{aire}(AGB) = 2 \cdot \text{aire}(GA'B)$.
 De même $\text{aire}(AGC) = 2 \cdot \text{aire}(GA'C)$.
 De plus $\text{aire}(BA'G) = \text{aire}(CA'G)$.
 Donc $\text{aire}(AGB) = \text{aire}(GBC) = \text{aire}(AGC)$

b) Réciproquement, soit M un point intérieur au triangle ABC tel que ABM, ACM et BCM aient la même aire. Soit M' l'intersection de (AM) avec (BC). AMB et AMC ont la même base AM donc la même hauteur. Soient h et k les pieds des hauteurs de ces triangles. Les triangles BM'h et CM'k sont isométriques, donc M' est le milieu de [BC].

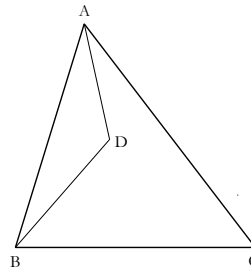
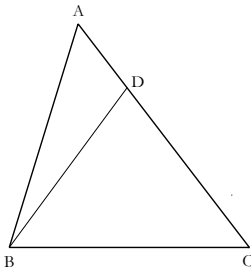
$$\text{Ainsi } \text{aire}(BMM') = \frac{1}{2} \text{aire}(BMC) = \frac{1}{2} \text{aire}(BMA),$$

donc $\frac{MA}{MM'} = \frac{\text{aire}(BMA)}{\text{aire}(BMM')} = 2$. Ce qui montre que
 $M = G$.

2. Considérons l'ensemble S des sommets autres que A, B, C des triangles intervenant dans la partition.

Supposons qu'au moins l'un des côtés du triangle ABC , $[AB]$ par exemple, ne contienne aucun point de S . Alors l'un des triangles de la partition est ABD où $D \in S$. Aucun autre point de S ne peut alors se situer à l'intérieur de ABD .

- Si D est sur un côté. Le triangle BCD doit être partagé en deux triangles : il y a alors trois décompositions possibles et dans chaque cas un seul autre point dans S
- Si D est à l'intérieur de ABC . Il y a une seule décomposition possible du quadrilatère $BCAD$ en deux triangles, et S ne contient que D .

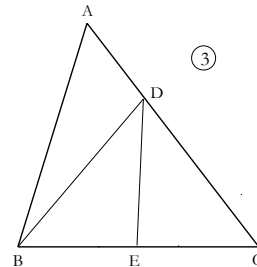
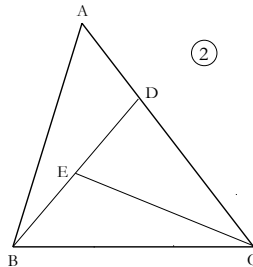
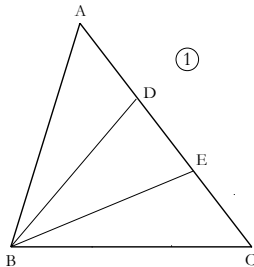


Supposons que les trois côtés de ABC contiennent chacun au moins un point de S (S contient alors au moins 3 points). Soit D le point de S sur $[AB]$ le plus proche de A , E le point de S sur $[AB]$ le plus proche de B (on peut avoir $D=E$). Les triangles de la partition de bases $[AD]$ et $[BE]$ ne peuvent avoir C pour sommet car il y a des points de S sur les côtés $[AC]$ et $[BC]$. Le complémentaire de ces deux triangles dans ABC ne peut pas en être un.

Conclusion de l'analyse : S contient 1 ou 2 points

Si S contient un seul point, nous avons vu dans 1. que ce point est G et qu'il convient

Si S contient 2 points. Les configurations sont nécessairement du type



Dans le premier cas les trois triangles ont la même aire si et seulement si D et E sont aux tiers du côté

Dans le deuxième cas D est au tiers du côté et E au milieu du segment issu de D

Dans le troisième cas D est au tiers d'un côté et E au milieu de l'autre côté

Il existe donc 10 configurations qui conviennent, trois pour chacun des types ①, ②, ③ et une pour le cas 1, avec G.

Remarques

Les deux premières questions étaient déjà les deux premières du sujet académique de Clermont des Olympiades 2002. La brochure APMEP n° 146 en a donné plusieurs solutions (Cf. pages 49 à 52).

Par contre les troisièmes questions diffèrent, toutes deux intéressantes, celle de Corse 2003 semblant plus facile.

Commentaires de l'équipe académique

La première question, très classique, a été résolue par plusieurs élèves par des méthodes variées, par exemple en utilisant la propriété de G sur une médiane, la hauteur issue du même sommet et le théorème de Thalès.

La réciproque a rarement été traitée.

La seule partition mise en évidence a été celle où les trois triangles ont un sommet commun.

Déroulement de l'épreuve

41 inscrits (22 filles, 19 garçons)

19 présents (9 filles, 10 garçons)

Les deux meilleures copies ont été notées environ 8/20 (avec un barème de 5 points par exercice).