

Solution

On y voit plus clair en interprétant x comme l'abscisse et y comme l'ordonnée d'un même point, dans un repère du plan. Les quatre opérations sont des déplacements, d'un pas, vers la droite, la gauche, le haut, et le bas. Correspondance :

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z
 $\rightarrow \leftarrow \uparrow \downarrow \rightarrow \leftarrow \uparrow \downarrow \rightarrow \leftarrow \uparrow \downarrow \rightarrow \leftarrow \uparrow \downarrow \rightarrow \leftarrow \uparrow \downarrow \rightarrow \leftarrow$

- 1) LOGIQUE conduit au déplacement $\downarrow \uparrow \uparrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow$ donc ici le couple vaut $(4,1)$.
- 2) Ce couple ne peut résulter que de $\rightarrow \uparrow$ ou $\uparrow \rightarrow$. Pour l'un de ces deux cas de figure, il y a 7 lettres possibles pour obtenir le pas vers la droite, et seulement 6 pour le pas vers le haut, et donc $7 \times 6 = 42$ mots. Au total, cela fait $42 + 42 = 84$ mots.
- 3) On peut obtenir $(1,1)$ avec un mot de dix lettres, par exemple : ACABABABAB. Cela est impossible pour 37 lettres, car dans le couple obtenu, $x + y$ est impair, puisque sa parité change à chaque opération.
- 4) Considérons le couple que fournit un mot de 10 lettres. La plus grande valeur possible pour $x + y$ est 10 (elle augmente au maximum d'une unité à chaque étape), donc $(x, y) \neq (4, 7)$. La réponse est non.

Remarques *(pas meilleures que l'excellente solution ci-dessus !)*

On peut aussi classer les lettres en quatre suites :

①	A	E	I	M	Q	U	Y
②	B	F	J	N	R	V	Z
③	C	G	K	O	S	W	
④	D	H	L	P	T	X	

Une lettre de ① et une de ② compensent leurs effets. Idem à propos de ③ et ④.

Question : On peut d'emblée supprimer LO, L et O compensant leurs effets.

Question 2 : Il faut et il suffit que deux lettres seulement soient non compensées, l'une des suites ① et ②, l'autre des suites ③, ④, donc qu'il reste un nombre pair de lettres, se compensant en chaque paire. C'est possible pour 10, pas pour 37.

Statistiques et palmarès

135 inscrits ; 103 présents.

8 primés : 3 prix, 5 accessits, tous de 1^{ère} S (5 garçons, 3 filles).

- 1- Sylvain MARSAT lycée Jeanne d'Arc CLERMONT
(8^{ème} accessit National).
- 2- Perrin LEFEBVRE Institution St-Alyre CLERMONT
- 3- Aurore PERNIER lycée Mme de Staël MONTLUÇON.

La « FICHE de CORRECTION » ci-après a été retournée aux candidats.

ACADEMIE de CLERMONT Olympiades académiques de mathématiques				
Appréciations du correcteur	Numéro d'anonymat : 			
Nous vous remercions de votre participation aux Olympiades, et nous espérons que vous avez passé un bon moment à chercher ces exercices.				
Bilan du travail effectué	Exerc. 1	Exerc. 2	Exerc. 3	Exerc. 4
Quelques initiatives				
Résultats partiels				
Résultats substantiels				
Travail abouti				
Appréciations particulières du correcteur				
☐ Vous avez tenté quelques démarches qui n'ont pas souvent abouti				
☐ Vous avez obtenu des résultats significatifs				
☐ Votre performance est très bonne.				