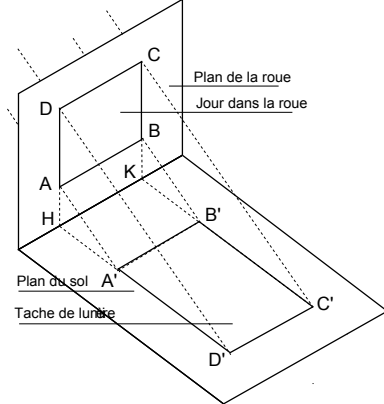


Solution

1°) A et D ont le même projeté orthogonal H sur le sol, B et C ont le même projeté orthogonal K sur le sol. Soit (P) le plan passant par A et perpendiculaire à la fois au sol et au plan de la roue, il contient D et H et coupe le sol selon une droite (e). De même soit (Q) le plan passant par B et perpendiculaire à la fois au sol et au plan de la roue, il contient K et coupe le sol selon une droite (f).

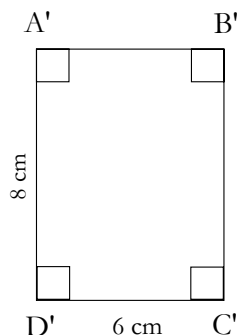


(P) et (Q) sont parallèles et donc (e) et (f) sont parallèles.

(P) contient le rayon passant par A, donc A' est sur (e), il en est de même pour

D'. De la même façon B' et C' sont sur (f). Les deux rayons passant par A et B déterminent un plan contenant (AB) et (A'B') est parallèle à (AB) et A'B' = AB. De même (D'C') est parallèle à (DC) donc à (AB) et D'C' = DC. A'B'C'D' est un parallélogramme.

De plus, (AB) est perpendiculaire à (P), donc (A'B') est perpendiculaire à (P) donc à (A'D'). A'B'C'D' est un rectangle.



$$\tan \widehat{AA'H} = \frac{AH}{A'H} = \frac{1}{2}, \quad \tan \widehat{DD'H} = \frac{DH}{D'H} = \frac{1}{2},$$

donc A'H = 2 AH et D'H = 2 DH.

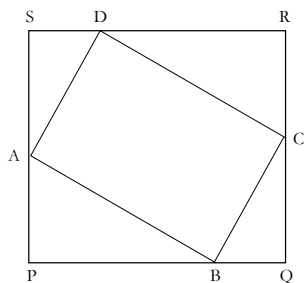
Donc A'D' = 2 AD.

Nous connaissons maintenant les dimensions du rectangle A'B'C'D', d'où le dessin¹.

$$2^\circ) \widehat{PBA} = \frac{\pi}{6}. \text{ Donc } PB = BA \times \cos \frac{\pi}{6}$$

$$\text{et } BQ = BC \times \sin \frac{\pi}{6}.$$

$$PA = BA \times \sin \frac{\pi}{6} \text{ et } AS = AD \times \cos \frac{\pi}{6}.$$



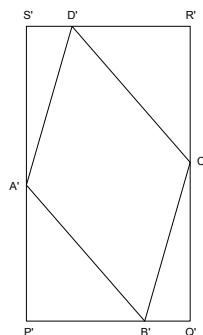
D'après la question précédente PQRS est projeté sur le sol selon un rectangle P'Q'R'S' tel que P'Q' = PQ et P'S' = 2PS.

A' est sur [P'S'] tel que P'A' = 2PA,

B' est sur [P'Q'] tel que P'B' = PB.

De même pour B' et C'.

D'où le dessin :



¹ Pour des raisons de mise en page, les dessins sont donnés en échelle réduite.

3°) En considérant le même rectangle PQRS dans le cas d'un angle de rotation quelconque de mesure θ , on a :

$$PB = BA \times \cos \theta = 6 \cos \theta, QB = BC \times \sin \theta = 4 \sin \theta,$$

$$\text{d'où } PQ = 6 \cos \theta + 4 \sin \theta$$

$$PA = BA \times \sin \theta = 6 \sin \theta, AS = AD \times \cos \theta = 4 \cos \theta,$$

$$\text{d'où } PS = 6 \sin \theta + 4 \cos \theta.$$

$$\text{Alors } P'Q' = PQ = 6 \cos \theta + 4 \sin \theta, \text{ et } P'S' = 2PS = 2 \times (6 \sin \theta + 4 \cos \theta).$$

Donc aire(A'B'C'D')

$$= P'Q' \times P'S' - \frac{1}{2}(P'A' \times P'B' + Q'B' \times Q'C' + R'C' \times R'D' + S'D' \times S'A')$$

$$= 2(6 \cos \theta + 4 \sin \theta)(6 \sin \theta + 4 \cos \theta)$$

$$- \frac{1}{2}(6 \cos \theta \times 12 \sin \theta + 4 \sin \theta \times 8 \cos \theta + 12 \cos \theta \times 6 \sin \theta + 4 \sin \theta \times 8 \cos \theta)$$

$$= 2 \times (24 \cos^2 \theta + 24 \sin^2 \theta) = 48.$$

L'aire de A'B'C'D' est constante quand la roue tourne.

Pistes de réflexion, d'Eric TROTOUX

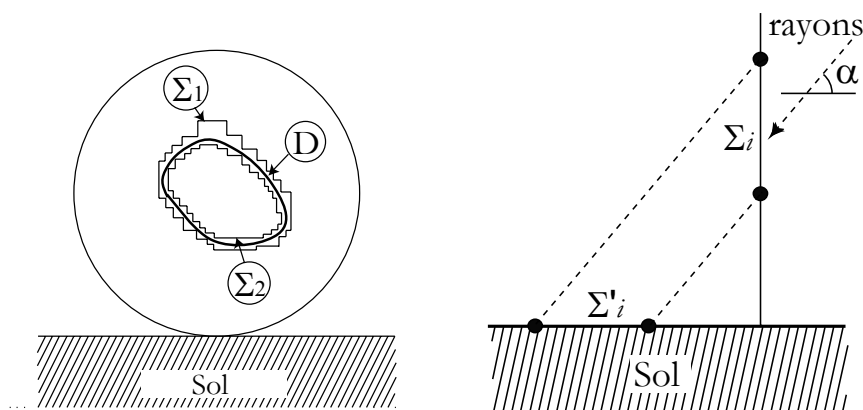
Une approche « physique » en terme d'énergie « rayonnée » du sol au travers du jour de la roue nous permet de voir que celle-ci ne dépend que de l'aire du jour (et non de sa forme géométrique) et de l'incidence des rayons. Ainsi, puisque l'aire du jour reste constante au cours du mouvement de la roue, celle de la tache lumineuse projetée au sol conserve la même valeur.

Un raisonnement classique du calcul infinitésimal permet de justifier ce qui précède à l'aide de la question 1°). Tout domaine quarrable D inclus dans le disque (la roue), peut être délimité intérieurement et extérieurement par une réunion finie de petits jours rectangulaires à côtés parallèles au sol, définissant deux polygones Σ_1 et Σ_2 tels que $\Sigma_2 \subset D \subset \Sigma_1$ et tels que l'aire $(\Sigma_1 \setminus \Sigma_2)$ soit arbitrairement petite. En désignant par Σ'_1 , Σ'_2 et D' les projetés respectifs de Σ_1 , Σ_2 et D, avec un angle d'incidence α , on a :

$$\text{aire}(\Sigma'_i) = \frac{1}{\tan \alpha} \text{aire}(\Sigma_i) \quad (i = 1, 2) \text{ et } \Sigma'_2 \subset D' \subset \Sigma'_1.$$

Comme $(\Sigma'_1 \setminus \Sigma'_2) = \frac{\text{aire}(\Sigma_1 \setminus \Sigma_2)}{\tan \alpha}$; on peut rendre cette dernière arbitrairement petite. On en conclut que D' est quarrable et que son aire vérifie :

$$\text{aire}(D') = \frac{1}{\tan \alpha} \text{aire}(D).$$



Roue vue de face

Roue vue de profil

Commentaires sur les prestations des élèves

de l'équipe académique :

« L'exercice a été très peu abordé par les candidats, la géométrie dans l'espace restant un sujet difficile pour beaucoup. Même pour les candidats l'ayant bien appréhendé, les allers et retours nécessaires entre vision spatiale et raisonnement dans un plan ont été un gros obstacle. »

de Michel Regnault :

« La jeunesse n'est toujours pas branchée 3D ! La seule apparition d'un exercice de géométrie dans l'espace a encore fait fuir des cohortes de géomètres en herbe et de nombreux candidats sont restés totalement muets sur la question.

Même si la situation concrète de départ pouvait troubler, la modélisation proposée rendait le problème abordable pour quiconque sachant représenter deux plans perpendiculaires et connaissant la définition de la tangente d'un angle géométrique. La recherche de la deuxième question était également très guidée et les calculs restaient d'un niveau élémentaire ; seulement, dans la dernière partie, quelques développements demandaient un peu de persévérance pour aboutir à un résultat sans doute inattendu.

On a quand même pu trouver quelques dessins corrects relatifs aux deux premières questions, maigre consolation pour un exercice qui méritait un meilleur accueil. »

Déroulement de l'épreuve, palmarès

La commission académique a d'abord déploré le fort absentéisme, plus important que les années passées, bien que le nombre des inscrits ait été inférieur. Parmi les solutions évoquées : le déplacement de l'épreuve au mercredi matin sur le temps des cours.

La qualité des copies a été jugée plutôt médiocre :

Devant l'absence de copies d'un niveau suffisant, les membres de la cellule ont pensé qu'il était préférable de ne pas en transmettre à la commission nationale.

Eléments statistiques :

Série	Inscrits			Présents			Primés		
	Filles	Garçons	Total	Filles	Garçons	Total	Filles	Garçons	Total
1S	36	74	110	26	133	59	1	6	7
Autres	2	19	21	2	17	19	0	0	0
Total	38	93	131	28	50	78	1	6	7

Palmarès (début)

Premier prix : Thomas OURSEL, Lycée Louis Liard - Falaise

Deuxième prix : M. ROHR, Lycée Victor Grignard - Cherbourg-Octeville