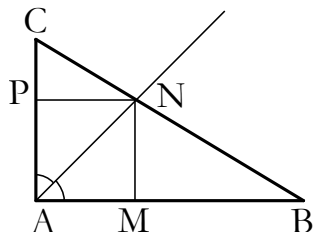


## Solution 1

Pour le premier carré AMNP, plusieurs méthodes sont rapides : Thalès ou la bissectrice ; dans tous les cas on obtient comme longueur du côté AM :

$$x = \frac{bc}{b+c}.$$



Pour le deuxième carré M'N'P'Q' on peut utiliser l'homothétie de centre A qui transforme le carré B'CB'C' en le carré M'N'P'Q'. (figure page suivante)

On obtient alors comme longueur du côté M'N' :  $y = \frac{bc\sqrt{b^2 + c^2}}{bc + b^2 + c^2}$

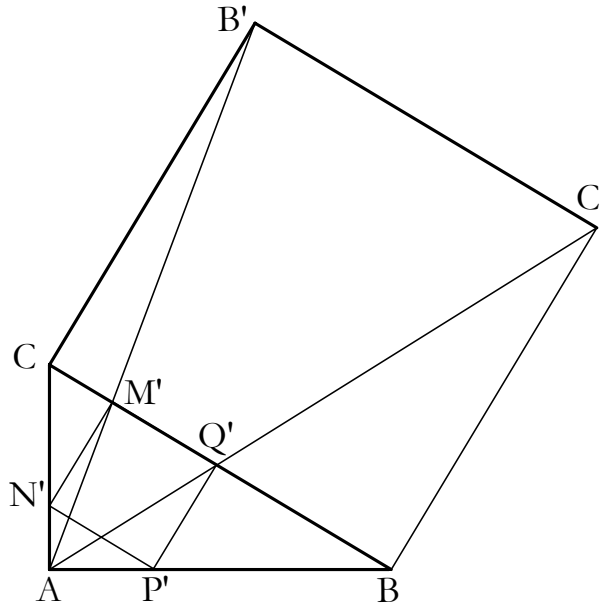
On peut alors comparer les aires des deux carrés ; on calcule  $x^2 - y^2$  et, après

calculs, on trouve :  $x^2 - y^2 = \frac{b^4 c^4}{(b+c)^2 (b^2 + bc + c^2)^2}$

ceci étant toujours positif, c'est le premier carré qui a la plus grande aire.

---

\* N.D.L.R. L'exercice proposé s'apparente, pour la situation de base, à l'un des exercices d'un rallye mathématique d'Alsace (Cf. revue *L'Ouvert* n° 103, 2001) : il s'agissait alors, connaissant les aires des deux carrés, de calculer la somme des côtés de l'angle droit.



A propos de cet exercice, un seul élève a su calculer  $y$  et donc comparer  $x^2$  et  $y^2$  ; par contre, il n'a pas su expliquer la construction. Pour le calcul de  $y$  il a utilisé les triangles semblables  $CN'M'$ ,  $N'P'A$  et  $P'BQ'$ .

Baucoup d'élèves ont su expliquer la construction du premier carré ; ils ont tous utilisé la bissectrice et ils ont souvent su en déduire  $x$ .

### Solution 2, par Abderrahim OUARDINI

1°) a) *Construction du premier carré*: l'auteur explicite l'utilisation de la bissectrice.

b) *Construction du second carré* : l'auteur explicite la construction à partir d'un carré BCB'C'.

c) Il remarque que, dans a) et b) le problème admet une et une seule solution.

2°) Calcul de  $x$

Exprimons que l'aire du triangle ABC est égale à la somme des aires des deux triangles PNC, MBN et celle du carré AMNP. On a :

$$\frac{bc}{2} = \frac{(b-x)x}{2} + \frac{(c-x)x}{2} + x^2,$$

d'où, après résolution :  $x = \frac{bc}{b+c}$ .

b) Calcul de  $y$ .

On a :

$\text{aire}(ABC) = \text{aire}(AP'N') + \text{aire}(P'BQ') + \text{aire}(N'M'C) + \text{aire}(N'P'Q'M')$ ,  
les triangles  $AP'N'$  et  $ABC$  sont semblables, donc :

$$\text{aire}(AP'N') = \text{aire}(ABC) \left( \frac{y}{a} \right)^2,$$

les triangles  $P'BQ'$  et  $N'M'C$  ont la même hauteur, donc :

$$\text{aire}(P'BQ') + \text{aire}(N'M'C) = \frac{1}{2} y (CM' + Q'B),$$

en remarquant que  $CM' + Q'B = a - y$ , la première égalité peut s'écrire :

$$\frac{bc}{2} = \frac{bc}{2} \left( \frac{y}{a} \right)^2 + \frac{1}{2} y (a - y) + y^2,$$

soit, après réduction,  $(bc + a^2)y^2 + a^3y - a^2bc = 0$ , équation du second degré en  $y$   
de discriminant :

$$\begin{aligned} \Delta &= a^2 \left( a^4 + 4bc(bc + a^2) \right) = (b^2 + c^2) (b^2 + c^2 + 2bc)^2 \\ &= (b^2 + c^2) (b + c)^4 > 0, \end{aligned}$$

et ayant pour racine positive :

$$\begin{aligned} y &= \frac{-a^3 + (b + c)^2 \sqrt{b^2 + c^2}}{2(bc + b^2 + c^2)} = \frac{-(b^2 + c^2) \sqrt{b^2 + c^2} + (b + c)^2 \sqrt{b^2 + c^2}}{2(bc + b^2 + c^2)} \\ &= \frac{bc \sqrt{b^2 + c^2}}{bc + b^2 + c^2}. \end{aligned}$$

Donc, pour comparer l'aire de ces deux carrés, il suffit de calculer  $x^2 - y^2$ , et de constater que c'est un réel strictement positif.

### Solution 3 et 4 avec un énoncé « allégé »

L'énoncé faisait une quasi-obligation, pour comparer les aires, de calculer d'abord les mesures des côtés des deux carrés (sinon on perdait le bénéfice du travail déjà fait).

*Voici deux méthodes, originales semble-t-il, de comparaison des aires des carrés sans calcul préalable de  $x$  et  $y$  :*

**Solution 3, par Abderrahim OUARDINI**

Les deux triangles MBN et Q'BP' d'une part, CPN et CM'N' d'autre part, sont semblables, donc :

$$\frac{\text{aire}(\text{MBN})}{\text{aire}(\text{Q'BP'})} = \left(\frac{x}{y}\right)^2 \quad \text{et} \quad \frac{\text{aire}(\text{CPN})}{\text{aire}(\text{CM'N'})} = \left(\frac{x}{y}\right)^2,$$

Remarquons que :

$\text{aire}(\text{ABC}) = \text{aire}(\text{P'BQ'}) + \text{aire}(\text{CN'M'}) + \text{aire}(\text{P'Q'M'N'}) + \text{aire}(\text{AP'N'})$ ,  
donc, en combinant ces trois égalités, on obtient :

$$\begin{aligned} \text{aire}(\text{ABC}) &= \left(\frac{y}{x}\right)^2 (\text{aire}(\text{MBN}) + \text{aire}(\text{CPN})) + y^2 + \text{aire}(\text{AP'N'}) \\ &= \left(\frac{y}{x}\right)^2 (\text{aire}(\text{MBN}) + \text{aire}(\text{CPN}) + x^2) + \text{aire}(\text{AP'N'}) \\ &= \left(\frac{y}{x}\right)^2 \text{aire}(\text{ABC}) + \text{aire}(\text{AP'N'}), \end{aligned}$$

$$\text{d'où} \quad \text{aire}(\text{AP'N'}) = \left(1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2\right) \text{aire}(\text{ABC}),$$

ceci prouve que  $x > y$ .

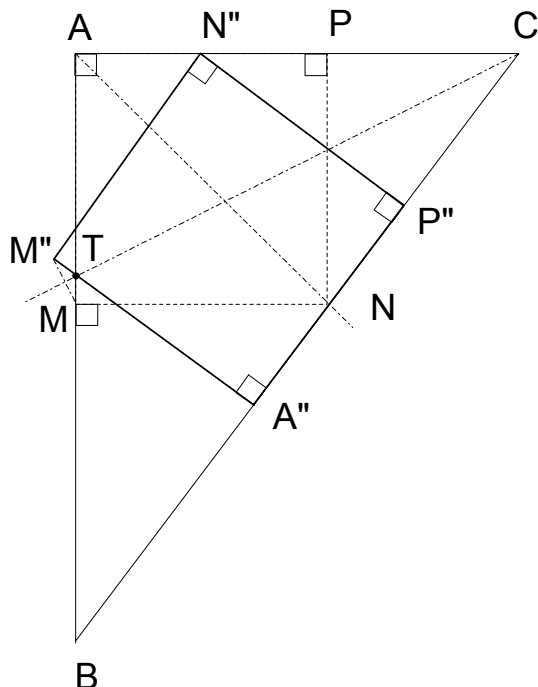
**A. OUARDINI donne une bibliographie :**

- [1] *Equipe de l'IREM d'Aquitaine* : « Interventions des lieux dans des problèmes de construction » (voir les pages 71-86 de « Repères » n° 40).
- [2] *P. Guyot* : « Un carré dans un triangle » 'pages 41- 58 de « Repères » n° 51).
- [3] *H. Lebesgue* : « Leçons sur les constructions géométriques » - 1950-
- [4] *A. Ouardini* : « Mathématiques de compétition : 112 problèmes corrigés » - Ed. Ellipses – 2000 – (voir page 82).

Mais dommage qu'il oublie le **BULLETIN APMEP n°441**, lequel donne en ses pages 433 à 440 une passionnante étude de Daniel REISZ, beaucoup plus riche et complète, dont nous préciserons le plan à la fin des textes concernant l'Académie de Bordeaux (page...)

## Solution 4, par Henri BAREIL

Pour comparer les deux carrés, partons de l'un, par exemple, de AMNP (cf. figure 1 de la « solution ») et symétrisons-le par rapport à la bissectrice  $\Delta$  de  $\hat{C}$  (versus : celle de  $\hat{B}$ ).



$AMNP \rightarrow A''M''N''P''$ , carré qui, de par sa construction, remplit trois des contraintes imposées à  $A'M'N'P'$  (cf. figure 2 de la « solution ») :

$A''$  et  $P''$  sur  $[BC]$ ,  $N''$  sur  $[AC]$ .

Mais  $M''$  semble extérieur au triangle ABC. Etudions-le :

Soit T l'intersection de  $[AB]$  et de la bissectrice de  $\hat{C}$ .

$$\frac{TA}{TB} = \frac{AC}{BC} \quad (1)$$

D'autre part  $\frac{MA}{MB} = \frac{NP}{MB} = \frac{NC}{NB}$   
et, N étant, sur  $[BC]$ , le pied de la bissectrice de  $\hat{A}$ ,

$$\frac{MA}{MB} = \frac{AC}{AB} \quad (2)$$

Confrontons (1) et (2) :

Comme  $BC > AC$ ,  $\frac{TA}{TB} < \frac{MA}{MB}$ , donc T est sur  $[MA]$  et  $M''$ , symétrique de M par rapport à  $\Delta$ , est bien extérieur au triangle ABC.

Le carré  $M'N'P'Q'$  (cf. figure 2 de la 1<sup>ère</sup> solution) est l'homothétique de  $M''N''P''Q''$  dans l'homothétie de centre C qui envoie  $M''$  sur  $[AB]$ , donc de rapport inférieur à 1.

Il s'ensuit que  $\text{aire}(MNPA) < \text{aire}(M'N'P'Q')$ .

## Remarque sur la construction du carré M'N'P'Q'

Sa construction par l'homothétie de centre A, à partir du carré BCB'C' est excellente et ... économique.

- Observons cependant la possibilité d'utiliser tout autre carré construit sur [B"C"] parallèle à [BC], avec B" sur [AB], C" sur [AC], ce carré et A étant de part et d'autre de (B" C"). Par une homothétie de centre A, ce carré-là donne, lui aussi, le carré cherché. Le choix de [B"C"] confondu avec [BC] permet une simplification des tracés.
- D'autre part, la solution 4 montre, incidemment, une autre façon d'obtenir M'N'P'Q' en éliminant (provisoirement) non pas la contrainte [M'Q'] sur [BC] mais la contrainte P' sur [AB] ou (exclusif) N' sur [AC]. Dans ma rédaction, j'ai abandonné la dernière contrainte, ensuite récupérée par une homothétie de centre C.

## Solution 5, par François LO JACOMO

3. Les triangles MBN et PCN sont semblables au triangle ABC, mais dans MBN, MN, de longueur  $x$ , est homologue à AC, de longueur  $b$ , alors que dans PNC, PN, de longueur  $x$  est homologue à AB, de longueur  $c$ , de sorte que l'aire du triangle ABC vaut :

$$\left( \left( \frac{x}{b} \right)^2 + \left( \frac{x}{c} \right)^2 \right) \times \text{aire} (ABC) + x^2$$

d'où 
$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{2}{bc} = \frac{(b+c)^2}{b^2c^2}$$

soit 
$$x = \frac{bc}{b+c}.$$

De même, les triangles AP'N', Q'BP', M'N'C sont tous trois semblables au triangle ABC, mais le côté de longueur  $y$  est soit le grand, soit le petit côté de l'angle droit, soit l'hypoténuse, si bien que l'aire du triangle ABC vaut :

$$\left( \left( \frac{y}{a} \right)^2 + \left( \frac{y}{b} \right)^2 + \left( \frac{y}{c} \right)^2 \right) \times \frac{bc}{2} + y^2,$$

d'où 
$$\begin{aligned} \frac{1}{y^2} &= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{2}{bc} = \frac{b^2c^2 + a^2(c^2 + b^2) + 2bca^2}{a^2b^2c^2} \\ &= \frac{(bc + a^2)^2}{a^2b^2c^2} \end{aligned}$$

soit 
$$y = \frac{abc}{bc + a^2}.$$

Il est clair, sans aucun calcul, que  $\frac{1}{y^2} > \frac{1}{x^2}$ , donc  $y^2 < x^2$ .

## Déroulement des épreuves, palmarès.

- 115 présents cette année. Stabilisation par rapport à l'année dernière.

Voici le palmarès de l'Académie :

### Premier prix :

Yin LIU Lycée Montaigne Bordeaux

Puis neuf lauréats dont voici les deux premiers :

- Julien CHARREL Lycée André Malraux Biarritz
- Florence HANSER Lycée privé Immaculée Conception Pau

## ANNEXE

### Plan de l'ÉTUDE DE DANIEL REISZ

Bulletin APMEP n° 441, pages 433 – 400 :

1 et 2 : Etude des deux carrés ;

3 : Comparaison des deux aires :

- par différence
- par quotient.

Daniel Reisz étudie alors, par la dérivée, la variation de celui-ci, fonction de  $\frac{c}{b}$ , donc de « la forme » du triangle rectangle. Il établit que le quotient  $Q$  est tel que  $1 < Q \leq 1,125$  et que la plus grande « différence » des aires correspond à  $AB = AC$ .

4 : Généralisation (très belle et accessible !) à  $ABC$  acutangle ...

... Où l'on établit que les aires des trois carrés « inscrits » sont dans l'ordre inverse des longueurs des côtés supportant un côté du carré.